ÜBER DIOPHANTISCHE GLEICHUNGEN MIT ENDLICH VIELEN LÖSUNGEN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

GENEHMIGT VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT

ZU BERLIN

VON

ALFRED BRAUER

AUS BERLIN

TAG DER PROMOTION: 19. 12. 1928

BERLIN 1929

DRUCK VON WALTER DE GRUYTER & CO.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547615_0063

ÜBER DIOPHANTISCHE GLEICHUNGEN MIT ENDLICH VIELEN LÖSUNGEN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

GENEHMIGT VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT

ZU BERLIN

VON

ALFRED BRAUER

AUS BERLIN

TAG DER PROMOTION: 19. 12. 1928

BERLIN 1929

DRUCK VON WALTER DE GRUYTER & CO.

Referenten: Herr Professor Dr. Schur
Herr Professor Dr. Schmidt

Mit Genehmigung der hohen Fakultät kommt hier nur der erste Teil der ganzen Arbeit zum Abdruck. Der Rest wird im 161. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik erscheinen.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung.

Ist $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion mit ganzen rationalen Koeffizienten, so ist die Frage, wann die diophantische Gleichung $f(x, y) = 0$ unendlich viele ganzzahlige Lösungen haben kann, im allgemeinen noch ungelöst. Solche Gleichungen, bei denen die zugehörige algebraische Kurve das Geschlecht 0 hat, sind von Herrn *D. Hilbert* und *A. Hurwitz* [2]), *H. Poincaré* [3]) und Herrn *E. Maillet* [4]) eingehend behandelt worden. Außerdem konnte man für eine große Anzahl von Klassen diophantischer Gleichungen zeigen, daß sie höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen besitzen können. Insbesondere erhielt *C. Runge* [5]) durch Betrachtung der Potenzreihenentwicklungen der durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ definierten algebraischen Funktion von x in der Umgebung von $x = \infty$ mehrere Kriterien dafür, daß die diophantische Gleichung $f(x, y) = 0$ höchstens endlich viele Lösungen in ganzen rationalen Zahlen x, y besitzt [6]). Den eigentlichen Kern der *Runge*schen Untersuchungen bildet der folgende

Satz A: *Ist die Reihe*

$$y = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

für hinreichend große $| x |$ *konvergent, so nimmt sie höchstens für endlich viele ganze rationale* x *ganze rationale Werte an* [7]).

---

[1]) Die vorliegende Arbeit bildet den ersten Teil meiner Dissertation, die am 12. 7. 1927 der Philosophischen Fakultät der Universität Berlin eingereicht wurde.

[2]) *D. Hilbert* und *A. Hurwitz*. Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null, Acta Mathematica 14 (1890/91) S. 217—224.

[3]) Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques, Journal de mathématiques pures et appliquées (5) 7 (1901) S. 161—233.

[4]) Détermination des points entiers des courbes algébriques unicursales à coefficients entiers, Comptes rendues de l'Académie des sciences du 27. janvier 1919 und Journal de l'école polytechnique (2) 20 (1919) S. 115—156.

[5]) Über ganzzahlige Lösungen von Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen, Journal für die reine und angewandte Mathematik 100 (1887) S. 425—435. Diese Arbeit zitiere ich im folgenden kurz mit *R.*

[6]) Vgl. hierzu auch

a) *Th. Skolem*, Untersuchungen über die möglichen Verteilungen ganzzahliger Lösungen gewisser Gleichungen, Videnskapsselskapets Skrifter I Mat. Naturw. Klasse 1921, Nr. 17 (zitiert mit *Sk.*).

b) *Th. Skolem*, Über ganzzahlige Lösungen einer Klasse unbestimmter Gleichungen, Norsk Matematisk Forenings Skrifter (1) Nr. 10 (1922) S. 1—12.

c) *K. Dörge*, Über die ganzen rationalen Lösungspaare von algebraischen Gleichungen in zwei Variablen, Inauguraldissertation Berlin 1925, S. 8—15.

d) *Th. Skolem*, Einige Sätze über ganzzahlige Lösungen gewisser Gleichungen, Mathematische Annalen 95 (1925) S. 58—68.

[7]) *R.* S. 425—26 oder *Sk.* S. 10 oder *G. Pólya* und *G. Szegö*, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II, Berlin Springer 1925, Abschnitt VIII Aufgabe 188 S. 148 (zitiert mit *P.-Sz.*).

Scheinbar von ganz anderer Natur ist das Kriterium, das *A. Thue*[1]) auf Grund seines Satzes über die Approximation algebraischer Zahlen für diophantische Gleichungen mit höchstens endlich vielen ganzen rationalen Lösungspaaren erhielt. Dieses Resultat wurde dann von Herrn *E. Maillet*[2]) und Herrn *C. Siegel*[3]) verschärft und verallgemeinert. Insbesondere bewies Herr *Siegel* die beiden folgenden Sätze[4]):

Satz B: *Es sei $U(x, y)$ eine binäre Form der Dimension n ohne mehrfache Linearfaktoren mit Koeffizienten aus dem algebraischen Zahlkörper* K, *der vom Grade h in bezug auf den Körper* P *der rationalen Zahlen sei. Man setze*

$$s = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{4n+1} - 1\right)\right].$$

Ferner sei $V(x, y)$ ein Polynom vom Gesamtgrad v mit Koeffizienten aus K, *welches zu $U(x, y)$ teilerfremd ist. Ist dann*

$$0 \leqq v < n - h\left(\frac{n}{s+1} + s\right),$$

so hat die diophantische Gleichung

$$U(x, y) = V(x, y)$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x, y aus K.

Satz C: *Es sei $U(x, y)$ eine binäre Form der Dimension n ohne mehrfache Linearfaktoren mit Koeffizienten aus dem algebraischen Zahlkörper* K, *der vom Grade h in bezug auf den Körper* P *der rationalen Zahlen sei. Man setze*

$$s = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{4nh+1} - 1\right)\right].$$

Ferner sei $V(x, y)$ ein Polynom vom Gesamtgrad v mit Koeffizienten aus K, *welches zu $U(x, y)$ teilerfremd ist. Es sei h_0 eine ganze positive Zahl. Ist dann*

$$0 \leqq v < n - h_0^4\left(\frac{nh}{s+1} + s\right),$$

so hat die diophantische Gleichung

$$U(x, y) = V(x, y)$$

höchstens endlich viele Lösungen in ganzen algebraischen Zahlen x, y, deren Grad $\leqq h_0$ ist.

Es sollen im folgenden durch Verbindung der funktionentheoretischen mit der zahlentheoretischen Methode einige Kriterien für binäre diophantische Gleichungen mit höchstens endlich vielen Lösungen aufgestellt werden. In der einfachsten Form lassen sich diese Resultate, ganz roh ausgedrückt, folgendermaßen formulieren:

Es seien p, q, r ganze rationale Zahlen, a_0 eine algebraische Zahl; für hinreichend große $|x|$ sei die Reihe

$$y = a_0 x^{\frac{p}{q}} + \sum_{\nu=r}^{\infty} a_\nu x^{\frac{p-\nu}{q}}$$

konvergent, ferner sei y keine ganze rationale Funktion von $x^{\frac{1}{q}}$. Ist dann r hinreichend groß, d. h. tritt in der Reihe hinter dem ersten Glied eine geeignet große Lücke auf, so wird höchstens für endlich viele ganze rationale x auch y ganz und rational.

---

[1]) Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, Journal für die reine und angewandte Mathematik 135 (1909) S. 284—305.

[2]) Sur un théorème de M. Axel Thue, Nouvelles Annales de Mathématiques (4) 16 (1916) S. 338—345.

[3]) Approximation algebraischer Zahlen. Mathematische Zeitschrift 10 (1921) S. 173—213 (zitiert mit *Sie.*).

[4]) *Sie.* S. 199—201.

Diese Kriterien werden im § 2 bewiesen. Einerseits bilden sie eine Verallgemeinerung des oben genannten *Runge*schen Satzes A, andererseits wird im § 3 gezeigt, daß diese Resultate die *Siegel*schen Sätze B und C als Spezialfälle enthalten, sich aber auch in viel allgemeineren Fällen anwenden lassen. Einige Anwendungen dieser Ergebnisse werde ich in einer demnächst in diesem Journal erscheinenden Arbeit behandeln [1]).

Für den Beweis dieser Kriterien sind einige Sätze über die Approximation algebraischer Zahlen durch algebraische Zahlen erforderlich, die im § 1 bewiesen werden. Den ersten dieser Sätze verdanke ich einer Bemerkung von Herrn *J. Schur*; er ist bisher nicht publiziert worden. Sowohl dieser Satz, wie der auf ganz andere Weise bewiesene Satz 2 ergeben mit verhältnismäßig einfachen Mitteln Resultate über die Approximation algebraischer Zahlen durch algebraische Zahlen. Insbesondere folgt aus Satz 2:

Ist α eine algebraische Zahl n-ten Grades über dem Körper P der rationalen Zahlen, l ein Multiplum von n, so läßt sich eine nur von α und l abhängende Konstante C angeben, derart, daß für alle algebraischen Zahlen ξ vom Grade l, die einem Oberkörper vom Grade $\frac{l}{n}$ über $\mathsf{P}(\alpha)$ angehören, die Ungleichung gilt:

$$|\alpha - \xi| > \frac{C}{H(\xi)},$$

wo $H(\xi)$ die Höhe [2]) von ξ bedeutet.

§ 1. Über die Approximation algebraischer Zahlen durch algebraische Zahlen.

I. Die in der Einleitung erwähnten *Siegel*schen Sätze B und C werden in dieser Arbeit nicht vorausgesetzt werden; dagegen werden die folgenden *Siegel*schen Sätze benutzt:

Satz D [3]): *Es sei ξ eine algebraische Zahl vom Grade $n \geqq 2$ in bezug auf den algebraischen Zahlkörper* K. *Man setze*

$$s = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{4n+1} - 1\right)\right].$$

Dann hat für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $C > 0$ die Ungleichung

$$|\xi - \eta| \leqq \frac{C}{H(\eta)^{\frac{n}{s+1} + s + \varepsilon}}$$

nur endlich viele Lösungen in primitiven Zahlen η aus K, *wo $H(\eta)$ die Höhe von η bedeutet.*

Satz E [3]): *Es sei ξ eine algebraische Zahl vom Grade $n \geqq 2$ in bezug auf den Körper* P *der rationalen Zahlen; h sei eine positive ganze rationale Zahl. Man setze*

$$s = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{4n+1} - 1\right)\right].$$

Dann hat für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $C > 0$ die Ungleichung

$$|\xi - \eta| \leqq \frac{C}{H(\eta)^{h\left(\frac{n}{s+1} + s + \varepsilon\right)}}$$

nur endlich viele Lösungen in algebraischen Zahlen η vom Grade $\leqq h$, wo $H(\eta)$ die Höhe von η bedeutet.

---

[1]) Über diophantische Gleichungen der Form $g^2(x, y) - \mu h^2(x, y) = \gamma y^n$.

[2]) Unter der Höhe $H(\xi)$ einer algebraischen Zahl ξ versteht Herr *Siegel* (*Sie.* S. 178) das Maximum der absoluten Beträge der teilerfremden ganzen rationalen Koeffizienten in der irreduziblen Gleichung, der ξ genügt.

[3]) *Sie.* Satz 1 (S. 178) in Verbindung mit Zusatz 1 und 3 (S. 191) und Hilfssatz X (S. 191).

Wir werden auch von folgenden weit weniger tief liegenden Sätzen Gebrauch machen:

Satz F [1]**:** *Es sei*

$$f(x) = a_0 x^t + a_1 x^{t-1} + \cdots + a_t$$

ein Polynom mit beliebigen Koeffizienten, deren absolute Beträge das Maximum a haben; λ sei eine beliebige Zahl. Man setze

$$g(x) = (x - \lambda) f(x) = c_0 x^{t+1} + c_1 x^t + \cdots + c_{t+1}.$$

Ist dann

$$c = \mathrm{Max}\{|c_0|, |c_1|, \ldots, |c_{t+1}|\},$$

so ist

$$a \leqq c(t+1).$$

Satz G [2]**:** *Ist*

$$s = \left[\frac{1}{2}(\sqrt{4n+1} - 1)\right],$$

so ist

$$2\sqrt{n} - 1 \leqq \frac{n}{s+1} + s \leqq \sqrt{4n+1} - 1.$$

Unter dem Körper P möge in dieser Arbeit immer der Körper der rationalen Zahlen, unter $H(\xi)$ die Höhe der algebraischen Zahl ξ verstanden werden.

II. Es soll zunächst der folgende Satz bewiesen werden, den ich einer Bemerkung von Herrn *Schur* verdanke:

Satz 1: *Ist α eine algebraische Zahl n-ten Grades, h eine ganze rationale Zahl, so gibt es eine nur von α und h abhängende Konstante C, derart daß für alle von α verschiedenen algebraischen Zahlen ξ vom Grade $l \leqq h$ die Ungleichung gilt:*

$$|\alpha - \xi| > \frac{C}{H(\xi)^n}.$$

Beweis: α genüge der irreduziblen Gleichung mit ganzen rationalen teilerfremden Koeffizienten:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

und ξ der irreduziblen Gleichung mit ganzen rationalen teilerfremden Koeffizienten:

$$g(x) = b_0 x^l + b_1 x^{l-1} + \cdots + b_l = 0.$$

Die Konjugierten von α seien $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(n-1)}$, die von ξ seien $\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(l-1)}$. Die endlich vielen Fälle, daß ξ eine der Konjugierten von α ist, kann man außer Acht lassen. Dann ist die Resultante R von $f(x)$ und $g(x)$:

$$R = a_0^l g(\alpha)\, g(\alpha') \cdots g(\alpha^{(n-1)}). \tag{1}$$

Nun ist für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$

$$|g(\alpha^{(\nu)})| \leqq H(\xi)\{1 + |\alpha^{(\nu)}| + |\alpha^{(\nu)}|^2 + \cdots + |\alpha^{(\nu)}|^t\} = H(\xi)\, \Gamma_\nu, \tag{2}$$

wo die Konstanten Γ_ν, ebenso wie die im folgenden auftretenden Konstanten Γ^* und Γ, nur von α und l abhängen. Setzt man ferner

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{x - \xi} \tag{3}$$

und bezeichnet man das Maximum der absoluten Beträge der Koeffizienten von $\varphi(x)$ mit M, so ist nach dem Satz F

[1]) *Sie.* S. 176.

[2]) *Sie.* S. 191.

$$M \leqq H(\xi)\, l.$$

Folglich ist

(4) $$|\varphi(\alpha)| \leqq H(\xi) \cdot l\{1 + |\alpha| + |\alpha|^2 + \cdots + |\alpha|^{l-1}\} = H(\xi)\Gamma^*.$$

Nun folgt aus (1) und (3)

$$g(\alpha) = \frac{R}{a_0^l\, g(\alpha')\, g(\alpha'') \cdots g(\alpha^{(n-1)})} = (\alpha - \xi)\, \varphi(\alpha);$$

also ist

$$\alpha - \xi = \frac{R}{a_0^l\, \varphi(\alpha)\, g(\alpha')\, g(\alpha'') \cdots g(\alpha^{(n-1)})}.$$

Wegen (2) und (4) ist daher

$$|\alpha - \xi| \geqq \frac{|R|}{|a_0|^l H(\xi)\Gamma^* \cdot H(\xi)^{n-1}\Gamma_1\Gamma_2 \cdots \Gamma_{n-1}} > \frac{|R|}{\Gamma H(\xi)^n}.$$

Andererseits ist R eine von 0 verschiedene ganze rationale Zahl, folglich ist

$$|R| \geqq 1,$$

$$|\alpha - \xi| > \frac{1}{\Gamma H(\xi)^n}.$$

Daher läßt sich eine nur von α und h abhängende Konstante C angeben, derart daß für alle von α verschiedenen algebraischen Zahlen ξ, deren Grad höchstens h ist, die Ungleichung gilt:

$$|\alpha - \xi| > \frac{C}{H(\xi)^n}.$$

Die Konstante C läßt sich leicht berechnen.

III. Satz 1 läßt sich auch folgendermaßen formulieren:

Satz 1*: *Ist α eine algebraische Zahl vom Grade n, so gibt es für jedes $C_1 > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ höchstens endlich viele algebraische Zahlen ξ vom Grade $l \leqq h$, für die die Ungleichung gilt:*

$$|\alpha - \xi| \leqq \frac{C_1}{H(\xi)^{n+\varepsilon}}.$$

Der Satz 1 sagt aus, daß das bekannte *Liouville*sche Resultat sinngemäß erhalten bleibt, wenn man als approximierende Zahlen nicht nur rationale, sondern algebraische Zahlen von beschränktem Grade nimmt. Im Gegensatz zu den Sätzen D und E gilt Satz 1 auch, wenn α rational ist. Ferner liefert Satz 1 sicher eine bessere Abschätzung als der Satz E, wenn

$$n < h\left(\frac{n}{s+1} + s\right)$$

ist. Nun ist aber nach dem Satz G

$$\frac{n}{s+1} + s \geqq 2\sqrt{n} - 1.$$

Satz 1 liefert also jedenfalls eine bessere Abschätzung, wenn

$$n < h(2\sqrt{n} - 1),$$

also

$$h > \frac{n}{2\sqrt{n} - 1}$$

ist.

Durch Verbindung von Satz E und Satz 1* ergibt sich der

Zusatz: *Setzt man*

$$z = \text{Min}\left\{n,\ h\left(\frac{n}{s+1} + s\right)\right\},$$

so hat für jedes $C > 0$ *und jedes* $\varepsilon > 0$ *die Ungleichung*

$$|\alpha - \xi| \leqq \frac{C}{H(\xi)^{z+\varepsilon}}$$

höchstens endlich viele Lösungen in algebraischen Zahlen ξ *vom Grade* $\leqq h$.

IV. Satz 1 läßt folgende Verschärfung zu:

Satz 2: *Ist* α *eine ganze algebraische Zahl n-ten Grades in bezug auf den Körper* P *der rationalen Zahlen und* l *eine positive ganze rationale Zahl, so läßt sich eine nur von* α *und* l *abhängende Konstante* C *angeben, derart daß für alle algebraischen Zahlen* $\xi \neq \alpha$ *vom Grade* l *die Ungleichung gilt:*

$$|\alpha - \xi| > \frac{C}{H(\xi)^m},$$

wenn m *den Relativgrad von* α *in bezug auf* $\mathsf{P}(\xi)$ *bezeichnet.*

Beweis: Die endlich vielen Fälle, daß ξ eine der Konjugierten $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(n-1)}$ von α ist, kann man außer Acht lassen. Es seien $\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(l-1)}$ die Konjugierten von ξ. Die irreduzible Gleichung mit ganzen rationalen teilerfremden Koeffizienten, der ξ genügt, sei

$$g(x) = b_0 x^l + b_1 x^{l-1} + \cdots + b_l = 0 \qquad (b_0 \geqq 1). \tag{5}$$

Es sei m zunächst eine feste positive ganze rationale Zahl $\leqq n$; man betrachte vorläufig nur solche Zahlen ξ vom Grade l, für die α in bezug auf $\mathsf{P}(\xi)$ den Relativgrad m hat. Dann hat der Körper $\mathsf{P}(\alpha, \xi)$ den Grad ml. Man setze

$$ml = t.$$

Faßt man $\alpha - \xi$ als Zahl von $\mathsf{P}(\alpha, \xi)$ auf, so sind die t Konjugierten von $\alpha - \xi$ von der Form

$$\alpha^{(\varkappa)} - \xi^{(\lambda)}; \tag{6}$$

$\varkappa$ durchläuft die Werte $0, 1, \ldots, n-1$; λ die Werte $0, 1, \ldots, l-1$; aber nicht jede Kombination $\varkappa, \lambda$ liefert Konjugierte von $\alpha - \xi$, sondern jedes feste $\xi^{(\lambda)}$ tritt bei der Darstellung der Konjugierten von $\alpha - \xi$ in der Form (6) genau m-mal auf. Die t Konjugierten von $\alpha - \xi$ brauchen nicht sämtlich verschieden zu sein. Es seien $c_1, c_2, \ldots, c_t$ ihre elementarsymmetrischen Funktionen; dann ist jedes c_ν eine ganze rationale Funktion von $\xi, \xi', \ldots, \xi^{(l-1)}$, die in bezug auf jedes $\xi^{(\lambda)}$ höchstens vom Grade m ist. Die Koeffizienten dieser ganzen rationalen Funktion sind wohlbestimmte Zahlen, die unterhalb einer nur von α, l und m abhängenden Schranke liegen. Es sei

$$\Pi = \xi^{(\beta)} \xi^{(\gamma)} \ldots \xi^{(\vartheta)} \tag{7}$$

ein Produkt gewisser voneinander verschiedener der Konjugierten von ξ; die übrigen Konjugierten von ξ seien $\xi^{(\varrho)}, \xi^{(\sigma)}, \ldots, \xi^{(\omega)}$. Dann ist $b_0 \Pi$ das konstante Glied in dem Polynom

$$h(x) = \frac{g(x)}{(x - \xi^{(\varrho)})(x - \xi^{(\sigma)}) \cdots (x - \xi^{(\omega)})}.$$

Also folgt durch mehrmalige Anwendung des Satzes F wegen (5)

$$|b_0 \Pi| < \Gamma^{l-1} H(\xi),$$

wo Γ eine vom Grade l von $g(x)$ abhängige, aber von ξ unabhängige Konstante ist. Andererseits ist jedes c_ν eine Summe, in der jedes Glied ein Produkt von höchstens m gleichen oder verschiedenen Faktoren Π der Form (7) mit beschränkten Koeffizienten ist. Sind $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_\mu$ solche Faktoren, so ist für $1 \leqq \mu \leqq m$

$$|\Pi_1 \Pi_2 \cdots \Pi_\mu| < \frac{\Gamma^{\mu(l-1)} H(\xi)^\mu}{b_0^\mu} \leqq \frac{\Gamma^{\mu(l-1)} H(\xi)^m}{b_0^m},$$

da nach (5)

$$b_0 \leqq H(\xi)$$

ist. Daher ist für eine geeignete, nur von α, l und m abhängende Konstante Γ_1

$$|c_\nu| < \Gamma_1 \frac{H(\xi)^m}{b_0^m} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, t). \tag{8}$$

Nun genügt $\alpha - \xi$ der Gleichung mit rationalen Koeffizienten:

$$x^t - c_1 x^{t-1} + c_2 x^{t-2} - + \cdots + (-1)^t c_t = 0,$$

also $\dfrac{1}{\alpha - \xi}$ der Gleichung

$$x^t - \frac{c_{t-1}}{c_t} x^{t-1} + \frac{c_{t-2}}{c_t} x^{t-2} - + \cdots + \frac{(-1)^t}{c_t} = 0.$$

Daher ist nach einem bekannten algebraischen Satze

$$\left|\frac{1}{\alpha - \xi}\right| < 1 + \operatorname{Max}\left\{\left|\frac{c_{t-1}}{c_t}\right|, \left|\frac{c_{t-2}}{c_t}\right|, \ldots, \left|\frac{1}{c}\right|\right\}. \tag{9}$$

Andererseits war c_t als Norm von $\alpha - \xi$ ein Produkt von t Zahlen der Form (6). Je m Faktoren enthalten dasselbe $\xi^{(\lambda)}$. Also ist c_t eine ganze rationale Funktion von $\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(n-1)}$ mit Koeffizienten, die ganze rationale Funktionen von $\xi, \xi', \ldots, \xi^{(l-1)}$ mit ganzen rationalen Zahlenkoeffizienten sind, und zwar sind diese Koeffizienten höchstens vom Grade m in bezug auf jedes $\xi^{(\lambda)}$. Multipliziert man daher c_t mit b_0^m, so wird wegen (5) nach einem bekannten zahlentheoretischen Satze $b_0^m c_t$ eine ganze rationale Funktion von $\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(n-1)}$ mit ganzen algebraischen Koeffizienten. Nun war α eine ganze algebraische Zahl, also ist auch $b_0^m c_t$ eine ganze algebraische Zahl. Andererseits ist $b_0^m c_t$ eine rationale, folglich eine ganze rationale Zahl. Also ist

$$|b_0^m c_t| \geqq 1,$$

folglich

$$\frac{1}{|c_t|} \leqq b_0^m.$$

Aus (8) folgt daher

$$\left|\frac{c_\nu}{c_t}\right| < \Gamma_1 H(\xi)^m \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, t-1).$$

Folglich ist wegen (9)

$$\left|\frac{1}{\alpha - \xi}\right| < 1 + \Gamma_1 H(\xi)^m,$$

$$|\alpha - \xi| > \frac{1}{1 + \Gamma_1 H(\xi)^m} > \frac{C^*}{H(\xi)^m},$$

wo C^* eine nur von α, l und m abhängende Konstante ist.

Da bei festem α für m nur endlich viele Werte in Betracht kommen, gibt es eine nur von α und l abhängende Konstante C, derart daß für alle von α verschiedenen algebraischen Zahlen ξ vom Grade l die Ungleichung gilt:

$$|\alpha - \xi| > \frac{C}{H(\xi)^m} .$$

V. **Zusatz:** *Satz 2 gilt auch für gebrochene algebraische Zahlen α.*

Beweis: Es sei g eine positive ganze rationale Zahl, derart daß $g\alpha$ eine ganze algebraische Zahl ist. Dann läßt sich eine Konstante C_1 angeben, derart daß für alle von $g\alpha$ verschiedenen algebraischen Zahlen ξ vom Grade l die Ungleichung gilt:

$$|g\alpha - \xi| > \frac{C_1}{H(\xi)^m} , \tag{10}$$

wenn m den Relativgrad von α in bezug auf $\mathsf{P}(\xi)$ bedeutet. Es wird nun behauptet, daß für $C = \frac{C_1}{g^{lm+1}}$ und jede von α verschiedene algebraische Zahl η vom Grade l, für die α in bezug auf $\mathsf{P}(\eta)$ vom Grade m ist, die Ungleichung gilt:

$$|\alpha - \eta| > \frac{C}{H(\eta)^m} .$$

Wäre nämlich

$$|\alpha - \eta| \leqq \frac{C_1}{g^{lm+1} H(\eta)^m} ,$$

so wäre

$$|g\alpha - g\eta| \leqq \frac{C_1}{g^{lm} H(\eta)^m} . \tag{11}$$

Man setze nun

$$\xi = g\eta .$$

Genügt ξ der Gleichung (5), so genügt η der Gleichung

$$b_0 g^l x^l + b_1 g^{l-1} x^{l-1} + \cdots + b_l = 0 .$$

Die Koeffizienten dieser Gleichung brauchen nicht teilerfremd zu sein; jedoch ist ihr größter gemeinsamer Teiler

$$d \leqq g^l ,$$

da die Koeffizienten von (5) teilerfremd waren. Daher ist

$$H(\xi) \leqq g^l H(\eta) .$$

Aus (11) würde also folgen

$$|g\alpha - \xi| \leqq \frac{C_1}{H(\xi)^m} .$$

Dies steht im Widerspruch zu (10).

VI. Während der Satz 1 besagt, daß für die Approximation einer algebraischen Zahl α vom Grade n durch algebraische Zahlen ξ vom Grade l sich eine Konstante C so angeben läßt, daß für alle von α verschiedenen Zahlen ξ die Ungleichung gilt:

$$|\alpha - \xi| > \frac{C}{H(\xi)^n} ,$$

folgt aus Satz 2, daß sich eine Konstante C_1 so angeben läßt, daß statt des Grades n im Exponenten der jeweilige Relativgrad m von α in bezug auf $\mathsf{P}(\xi)$ genommen werden kann. Daher liefert Satz 2 in vielen Fällen eine bessere Abschätzung als der Satz 1 und demnach oft eine bessere Abschätzung als der *Siegel*sche Satz E.

Aus dem Satz D folgt, daß für jede algebraische Zahl α und beliebige Konstanten $C > 0$ und $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$|\alpha - \xi| > \frac{C}{H(\xi)^{2+\varepsilon}}$$

für die primitiven Zahlen ξ eines festen Zahlkörpers K gilt, wenn α vom Grade 2 in bezug auf K ist. Aus dem Satz 2 folgt, daß bei geeigneter Wahl von C die schärfere Ungleichung

$$|\alpha - \xi| > \frac{C}{H(\xi)^2}$$

sogar gleichzeitig für die primitiven Zahlen aller Zahlkörper eines festen Grades gilt, für die α vom Relativgrad 2 ist.

VII. Von Interesse ist der folgende Spezialfall des Satzes 2, der schon in der Einleitung erwähnt wurde:

Spezialfall: *Ist α eine algebraische Zahl, l eine positive ganze rationale Zahl, so gibt es eine nur von α und l abhängende Konstante C, derart daß für die primitiven Zahlen ξ aller algebraischen Zahlkörper vom Grade l, die α enthalten, die Ungleichung gilt:*

$$|\alpha - \xi| > \frac{C}{H(\xi)}.$$

Diese Ungleichung gilt erst recht, wenn man für ξ nur primitive Zahlen eines festen Körpers K vom Grade l, der α enthält, zuläßt; d. h. der Satz D gilt auch, wenn α vom Grade 1 in bezug auf K ist, da hier

$$s = \left[\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\right] = 0,$$

$$\frac{1}{s+1} + s = 1$$

wird.

VIII. Der Beweis der folgenden drei Sätze soll gemeinsam geführt werden.

Satz 3a: *Es sei q eine positive ganze rationale Zahl, α eine feste algebraische Zahl und zwar sei α^q vom Grade n in bezug auf den algebraischen Zahlkörper* K. *Man setze*

$$s = \left[\frac{1}{2}(\sqrt{4n+1} - 1)\right],$$

$$z = \frac{n}{s+1} + s.$$

Dann gibt es für jede Konstante $C > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ höchstens endlich viele primitive Zahlen ξ aus K, *für die die Ungleichung*

$$|\alpha - \sqrt[q]{\xi}| \leqq \frac{C}{H(\xi)^{z+\varepsilon}}$$

erfüllt ist.

Satz 3b: *Es seien q und h positive ganze rationale Zahlen, α eine feste algebraische Zahl und zwar sei α^q vom Grade n in bezug auf den Körper* P. *Man setze*

$$s = \left[\frac{1}{2}(\sqrt{4n+1} - 1)\right],$$

$$z = \operatorname{Min}\left\{n, h\left(\frac{n}{s+1} + s\right)\right\}.$$

Dann gibt es für jede Konstante $C > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ höchstens endlich viele algebraische Zahlen ξ vom Grade $\leqq h$, für die die Ungleichung gilt:

$$|\alpha - \sqrt[q]{\xi}| \leqq \frac{C}{H(\xi)^{z+\varepsilon}}.$$

Satz 3c: *Es seien q, l und z positive ganze rationale Zahlen, α eine feste algebraische Zahl und zwar sei α^q vom Grade n in bezug auf den Körper* P. *Dann gibt es für jede Konstante $C > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ höchstens endlich viele algebraische Zahlen ξ vom Grade l, für die α^q vom Grade z in bezug auf* $\mathsf{P}(\xi)$ *ist und für die die Ungleichung gilt:*

$$|\alpha - \sqrt[q]{\xi}| \leqq \frac{C}{H(\xi)^{z+\varepsilon}}.$$

Beweis: Es genügt, solche Zahlen ξ zu betrachten, für die für mindestens einen der Werte von $\sqrt[q]{\xi}$, der etwa mit ζ bezeichnet werde,

$$|\alpha - \zeta| < 1 \tag{12}$$

ist. Es sei ϱ eine primitive q-te Einheitswurzel. Dann ist wegen (12)

$$\begin{aligned} |\alpha - \varrho^\nu \zeta| &\leqq |\alpha| + |\varrho^\nu \zeta| = |\alpha| + |\zeta| \leqq |\alpha| + |\alpha| + 1 \\ &= 2|\alpha| + 1 = \Gamma \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q-1), \end{aligned} \tag{13}$$

wo Γ eine nur von α abhängende Konstante ist. Nun ist

$$(\alpha - \zeta)(\alpha - \varrho\zeta) \cdots (\alpha - \varrho^{q-1}\zeta) = \alpha^q - \zeta^q = \alpha^q - \xi.$$

Folglich ist nach (13)

$$|\alpha - \zeta| > \frac{|\alpha^q - \xi|}{\Gamma^{q-1}}. \tag{14}$$

Im Fall des Satzes 3a war nun α^q eine algebraische Zahl vom Grade n in bezug auf K, ξ eine den Körper K erzeugende Zahl. Daher folgt für $n \geqq 2$ aus Satz D und für $n = 1$ aus Satz 2 (Spezialfall) für jedes $C' = C\Gamma^{q-1} > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$, daß es höchstens endlich viele primitive Zahlen aus K gibt, für die

$$|\alpha^q - \xi| \leqq \frac{C'}{H(\xi)^{z+\varepsilon}} = \frac{C\Gamma^{q-1}}{H(\xi)^{z+\varepsilon}} \tag{15a}$$

ist.

Im Fall des Satzes 3b ist α^q eine algebraische Zahl vom Grade n in bezug auf P. Daher folgt aus Satz 1 (Zusatz), daß für jedes $C' = C\Gamma^{q-1} > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ es höchstens endlich viele algebraische Zahlen ξ vom Grade $\leqq h$ gibt, für die

$$|\alpha^q - \xi| \leqq \frac{C'}{H(\xi)^{z+\varepsilon}} = \frac{C\Gamma^{q-1}}{H(\xi)^{z+\varepsilon}} \tag{15b}$$

ist.

Im Falle des Satzes 3c folgt aus Satz 2 (Zusatz), daß für jedes $C' = C\Gamma^{q-1} > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ es höchstens endlich viele algebraische Zahlen ξ vom Grade l gibt, für die α^q vom Grade z in bezug auf $\mathsf{P}(\xi)$ ist und für die die Ungleichung gilt:

$$|\alpha^q - \xi| \leqq \frac{C'}{H(\xi)^{z+\varepsilon}} = \frac{C\Gamma^{q-1}}{H(\xi)^{z+\varepsilon}}. \tag{15c}$$

Aus (14) und (15a) bzw. (15b) bzw. (15c) folgt daher abgesehen von endlich vielen Ausnahmefällen

$$|\alpha - \sqrt[q]{\xi}| = |\alpha - \zeta| > \frac{C}{H(\xi)^{z+\varepsilon}}.$$

IX. Der Satz 3a läßt sich noch etwas erweitern; hierzu braucht man den folgenden

Hilfssatz 1: *Es sei q eine positive ganze rationale Zahl, ξ eine Zahl aus dem algebraischen Zahlkörper* K, *ζ einer der Werte von $\xi^{\frac{1}{q}}$, k die kleinste positive ganze rationale Zahl, für die ζ^k eine Zahl aus* K *ist; ferner enthalte* K *die primitiven k-ten Einheitswurzeln. Dann ist*

$$H(\zeta) = H(\zeta^k).$$

Beweis: Ist ϱ eine primitive k-te Einheitswurzel, so hat die Gleichung

$$x^k - \zeta^k = 0 \tag{16}$$

die Wurzeln $\zeta, \varrho\,\zeta, \varrho^2\,\zeta, \ldots, \varrho^{k-1}\,\zeta$. Wäre nun die Gleichung (16) in K reduzibel, so wäre, wenn $m < k$ der Grad eines der Faktoren wäre, das konstante Glied dieses Faktors von der Form

$$\beta = \varrho^{\nu}\,\zeta^m,$$

wo ν eine ganze rationale Zahl und β eine Zahl aus K ist. Hieraus folgt, da $\varrho <$ K war,

$$\zeta^m < \mathsf{K}.$$

Dies widerspricht der Voraussetzung, da $m < k$ war. Demnach ist die Gleichung (16) in K irreduzibel.

Man setze nun

$$\zeta^k = \eta_1; \tag{17}$$

die Konjugierten von η_1 seien $\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_t$. Dann genügt η_1 im Körper P der irreduziblen Gleichung

$$(x - \eta_1)\,(x - \eta_2) \cdots (x - \eta_t) = 0. \tag{18}$$

Die Gleichung

$$(x^k - \eta_1)\,(x^k - \eta_2) \cdots (x^k - \eta_t) = 0 \tag{19}$$

hat Koeffizienten aus P; nach (17) ist ζ eine ihrer Wurzeln, ihr Grad ist kt. Wegen der Irreduzibilität von (16) in K ist ζ vom Grade k in bezug auf K, also mindestens vom Grade k in bezug auf $\mathsf{P}(\eta_1)$. Wegen (18) ist η_1 vom Grade t in bezug auf P. Da $\eta_1 < \mathsf{P}(\zeta)$ ist, ist daher ζ in bezug auf P mindestens vom Grade kt, wegen (19) folglich genau vom Grade kt. Daher ist (19) in P irreduzibel. Durch Vergleichen der Koeffizienten von (18) und (19) folgt

$$H(\zeta^k) = H(\zeta).$$

Die Voraussetzungen des Hilfssatzes sind erfüllt, wenn K eine q-te primitive Einheitswurzel enthält. Denn aus der Tatsache, daß k die kleinste positive ganze rationale Zahl war, für die

$$\zeta^k < \mathsf{K},$$

und aus

$$\zeta^q = (\xi^{\frac{1}{q}})^q < \mathsf{K}$$

folgt, daß $k \mid q$ ist.

X. Auf Grund des Hilfssatzes läßt sich nun der Satz 3a folgendermaßen erweitern.

Satz 3a*: *Es sei q eine positive ganze rationale Zahl, α eine feste algebraische Zahl vom Grade n^* in bezug auf den algebraischen Zahlkörper* K. *Die primitiven q-ten Einheitswurzeln seien in* K *enthalten. Man setze*

$$s^* = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{4\,n^* + 1} - 1\right)\right],$$

$$z^* = \frac{n^*}{s^* + 1} + s^*.$$

Dann gibt es für jede Konstante $C > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ höchstens endlich viele primitive Zahlen ξ aus K, *derart daß, wenn ζ einer der Werte von $\xi^{\frac{1}{q}}$ ist, die Ungleichung gilt:*

$$|\alpha - \zeta| \leqq \frac{C}{H(\zeta)^{z^*+\varepsilon}}.$$

Beweis: Es sei k die kleinste positive ganze rationale Zahl, für die $\zeta^k <$ K ist. Dann ist

$$\mathsf{P}(\zeta^k) < \mathsf{K} = \mathsf{P}(\xi).$$

Andererseits hat, da $k \mid q$ ist, $\zeta^k = \xi^{\frac{k}{q}}$ mindestens denselben Grad wie ξ. Daher ist

$$\mathsf{P}(\zeta^k) = \mathsf{P}(\xi).$$

Es sei ϱ eine primitive k-te Einheitswurzel. Man erhält völlig analog zur Formel (14)

$$|\alpha - \zeta| > \frac{|\alpha^k - \zeta^k|}{\Gamma^{*k-1}}, \tag{20}$$

wo Γ^* eine nur von α abhängende Konstante ist. Nun ist α^k eine algebraische Zahl höchstens vom Grade n^* in bezug auf K, ξ eine den Körper K erzeugende Zahl, also auch ζ^k eine solche. Daher folgt für $n^* \geqq 2$ aus Satz D, für $n^* = 1$ aus Satz 2 (Spezialfall), daß es für jedes $C' = C\Gamma^{*k-1} > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ höchstens endlich viele primitive Zahlen ξ aus K gibt, für die

$$|\alpha^k - \zeta^k| \leqq \frac{C'}{H(\zeta^k)^{z^*+\varepsilon}} \tag{21}$$

ist. Andererseits ist nach Hilfssatz 1

$$H(\zeta^k) = H(\zeta). \tag{22}$$

Daher folgt aus (20), (21) und (22) abgesehen von endlich vielen Ausnahmefällen

$$|\alpha - \zeta| > \frac{C'}{H(\zeta^k)^{z^*+\varepsilon}\,\Gamma^{*k-1}} = \frac{C}{H(\zeta)^{z^*+\varepsilon}}.$$

Satz 3a* kann als eine gewisse Verallgemeinerung des Satzes D aufgefaßt werden, indem als approximierende Zahlen nicht nur primitive Zahlen des Körpers K, sondern für jedes feste positive ganzzahlige q auch alle q-ten Wurzeln aus solchen Zahlen zugelassen werden, vorausgesetzt, daß K die primitiven q-ten Einheitswurzeln enthält.

XI. **Satz 4:** *Es sei q eine positive ganze rationale Zahl, α eine algebraische Zahl und war sei α^q vom Grade n in bezug auf den Zahlkörper* K, *der den Grad h in bezug auf* P *habe. Ferner seien ξ und $\eta \neq 0$ ganze Zahlen aus* K; $\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(h-1)}$ *und* $\eta', \eta'', \ldots, \eta^{(h-1)}$ *ihre Konjugierten, die untereinander nicht sämtlich verschieden zu sein brauchen, M das Maximum der $2h$ Zahlen $|\xi|, |\xi'|, \ldots, |\xi^{(h-1)}|, |\eta|, |\eta'|, \ldots, |\eta^{(h-1)}|$. Man setze*

$$s = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{4n+1} - 1\right)\right].$$

Dann gibt es für jede Konstante $C > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ höchstens endlich viele Zahlen ξ und η, für die die Ungleichung gilt:

$$\left|\alpha - \sqrt[q]{\frac{\xi}{\eta}}\right| < \frac{C}{M^{h\left(\frac{n}{s+1}+s+\varepsilon\right)}}.$$

Beweis [1]**:** $\frac{\xi}{\eta}$ genügt der Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten:

$$\varphi(Z) = \prod_{\nu=0}^{h-1} (\eta^{(\nu)} Z - \xi^{(\nu)}) = 0 .$$

Ist

$$\psi(Z) = a_0 Z^d + a_1 Z^{d-1} + \cdots + a_d \neq 0 \tag{23}$$

die irreduzible Gleichung mit ganzen rationalen teilerfremden Koeffizienten, der $\frac{\xi}{\eta}$ genügt, so gibt es eine ganze rationale Zahl g, derart daß

$$\varphi(Z) = g\{\psi(Z)\}^{\frac{h}{d}}$$

ist. Man kann daher die h Linearfaktoren von $\varphi(Z)$ so in Gruppen zu d Faktoren einteilen, daß das Produkt der d Faktoren jeder Gruppe abgesehen von einer Konstanten gleich $\psi(Z)$ wird. Bei geeigneter Nummerierung der $\xi^{(\nu)}$ und $\eta^{(\nu)}$ ist also

$$\left\{\begin{array}{l} \prod_{\nu=0}^{d-1} (\eta^{(\nu)} Z - \xi^{(\nu)}) = \gamma_1 \psi(Z) , \\ \prod_{\nu=d}^{2d-1} (\eta^{(\nu)} Z - \xi^{(\nu)}) = \gamma_2 \psi(Z) , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \prod_{\nu=h-d}^{h-1} (\eta^{(\nu)} Z - \xi^{(\nu)}) = \gamma_{\frac{h}{d}} \psi(Z) , \end{array}\right. \tag{24}$$

wo

$$|\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{\frac{h}{d}}| = |g| \geqq 1$$

ist. Daher ist mindestens ein $|\gamma_\lambda|$, etwa

$$|\gamma_1| \geqq 1. \tag{25}$$

Aus (23) und (24) folgt also

$$|\gamma_1 a_\varkappa| < 2^d M^d \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, d),$$

demnach wegen (25) erst recht

$$|a_\varkappa| < 2^d M^d \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, d).$$

Daher ist

$$H\left(\frac{\xi}{\eta}\right) < 2^d M^d. \tag{26}$$

Ferner ist $\frac{\xi}{\eta}$ eine primitive Zahl eines Unterkörpers von K. In bezug auf diesen Unterkörper sei α^q vom Grade n'. Dann ist

$$n' \leqq n \frac{h}{d} . \tag{27}$$

Man muß nun 2 Fälle unterscheiden:

1. $n \geqq 2$.

Man setze

$$s' = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{4n' + 1} - 1\right)\right].$$

[1]) Vgl. hierzu *Sie.* S. 192 Satz 2.

Dann gibt es in jedem der endlich vielen Unterkörper von K für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $C_1 = C \cdot 2^{d\left(\frac{n'}{s'+1}+s'+\varepsilon\right)} > 0$ nach Satz 3a höchstens endlich viele primitive Zahlen $\frac{\xi}{\eta}$, für die die Ungleichung gilt:

$$\left|\alpha - \sqrt[q]{\frac{\xi}{\eta}}\right| \leqq \frac{C_1}{\left\{H\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\right\}^{\frac{n'}{s'+1}+s'+\varepsilon}}.$$

Daher ist abgesehen von endlich vielen Ausnahmefällen für alle Zahlen $\frac{\xi}{\eta}$ aus K wegen (26)

$$(28) \qquad \left|\alpha - \sqrt[q]{\frac{\xi}{\eta}}\right| > \frac{C_1}{\left\{H\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\right\}^{\frac{n'}{s'+1}+s'+\varepsilon}} > \frac{C_1}{(2^d M^d)^{\frac{n'}{s'+1}+s'+\varepsilon}} = \frac{C}{M^{d\left(\frac{n'}{s'+1}+s'+\varepsilon\right)}}.$$

Ist $\frac{\xi_0}{\eta_0}$ einer der Ausnahmewerte, ist also

$$(29) \qquad \left|\alpha - \sqrt[q]{\frac{\xi_0}{\eta_0}}\right| \leqq \frac{C}{M^{d\left(\frac{n'}{s'+1}+s'+\varepsilon\right)}},$$

so gibt es nur endlich viele Paare ganzer algebraischer Zahlen ξ_ν, η_ν aus K, für die

$$\sqrt[q]{\frac{\xi_\nu}{\eta_\nu}} = \sqrt[q]{\frac{\xi_0}{\eta_0}}$$

ist und für die die Bedingung (29) erfüllt ist; denn für jedes dieser Zahlenpaare ist

$$\left|\alpha - \sqrt[q]{\frac{\xi_\nu}{\eta_\nu}}\right| = \left|\alpha - \sqrt[q]{\frac{\xi_0}{\eta_0}}\right| = \Gamma,$$

wo Γ eine von ν unabhängige Konstante ist. Andererseits ist

$$d\left(\frac{n'}{s'+1} + s' + \varepsilon\right) > 1.$$

Daher würde aus (29) folgen:

$$(30) \qquad M \leqq \frac{C}{\Gamma}.$$

Da C und Γ Konstanten waren, ist (30) nur für endlich viele ganze algebraische Zahlen ξ_ν, η_ν erfüllt, weil es nur endlich viele ganze algebraische Zahlen gibt, die mit ihren sämtlichen Konjugierten innerhalb eines festen Kreises liegen. Daher gilt die Ungleichung (28) für alle Paare ganzer algebraischer Zahlen ξ, η aus K, abgesehen von endlich vielen Ausnahmefällen.

a) Es sei zunächst

$$\frac{h}{d} > 2;$$

dann ist

$$18\frac{h}{d} - 28\sqrt{\frac{h}{d}} > -5,$$

$$28\left(\frac{h}{d} - \sqrt{\frac{h}{d}}\right) > 10\frac{h}{d} - 5,$$

folglich erst recht

$$20\sqrt{n}\left(\frac{h}{d}-\sqrt{\frac{h}{d}}\right)>10\,\frac{h}{d}-5,$$

$$2\sqrt{n}\left(\frac{h}{d}-\sqrt{\frac{h}{d}}\right)>\frac{h}{d}-\frac{1}{2},$$

$$\frac{h}{d}\,(2\sqrt{n}-1)>2\sqrt{n\,\frac{h}{d}}-\frac{1}{2}. \tag{31}$$

Nun ist nach Satz G

$$\frac{n}{s+1}+s\geqq 2\sqrt{n}-1,$$

folglich wegen (31)

$$h\left(\frac{n}{s+1}+s\right)\geqq d\,\frac{h}{d}\,(2\sqrt{n}-1)>d\left(2\sqrt{n\,\frac{h}{d}}-\frac{1}{2}\right)>d\left(\sqrt{4\,\frac{nh}{d}+1}-1\right),$$

da $\frac{nh}{d}>1$ ist.

Daher folgt aus (27) und Satz G

$$h\left(\frac{n}{s+1}+s\right)>d\,(\sqrt{4n'+1}-1)\geqq d\left(\frac{n'}{s'+1}+s'\right). \tag{32}$$

b) Ist dagegen

$$\frac{h}{d}=1,$$

so ist

$$n=n',$$

$$h\left(\frac{n}{s+1}+s\right)=d\left(\frac{n'}{s'+1}+s'\right). \tag{32a}$$

Also folgt aus (28), (32) und (32 a) für $n\geqq 2$

$$\left|\alpha-\sqrt[q]{\frac{\xi}{\eta}}\right|>\frac{C}{M^{h\left(\frac{n}{s+1}+s+\varepsilon\right)}}. \tag{33}$$

2. $n=1$.

Da als Grad von $\frac{\xi}{\eta}$ nur die endlich vielen Zahlen $1, 2, \ldots, h$ in Betracht kommen, folgt aus Satz 3c, daß für jedes $\varepsilon>0$ und jedes $C_1=C\cdot 2^{d(n'+\varepsilon)}>0$ es höchstens endlich viele Zahlen $\frac{\xi}{\eta}$ aus K gibt, für die

$$\left|\alpha-\sqrt[q]{\frac{\xi}{\eta}}\right|\leqq\frac{C_1}{\left\{H\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\right\}^{n'+\varepsilon}}$$

ist. Analog wie im Fall 1. und aus (26) folgt daher, daß abgesehen von endlich vielen ganzzahligen Wertepaaren ξ, η aus K die Ungleichung gilt:

$$\left|\alpha-\sqrt[q]{\frac{\xi}{\eta}}\right|>\frac{C_1}{(2^d M^d)^{n'+\varepsilon}}=\frac{C}{M^{d(n'+\varepsilon)}}. \tag{34}$$

Aus (27) folgt

$$dn'\leqq hn=h.$$

Daher folgt aus (34), daß auch im Falle $n = 1$ wegen $s = 0$ abgesehen von endlich vielen Ausnahmefällen die Ungleichung gilt:

$$\left| \alpha - \sqrt[q]{\frac{\xi}{\eta}} \right| > \frac{C}{M^{h\left(\frac{n}{s+1}+s+\varepsilon\right)}}.$$

Hieraus und aus (33) erhält man die Behauptung.

§ 2. Kriterien für diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen.

XII. Auf Grund der vorhergehenden Sätze sollen nun durch Untersuchung der Potenzreihenentwicklungen der durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ definierten algebraischen Funktion von x Kriterien abgeleitet werden, die es ermöglichen, in vielen Fällen die Unmöglichkeit unendlich vieler Lösungen der diophantischen Gleichung $f(x, y) = 0$ zu beweisen. In einigen Fällen braucht man sich nicht auf Potenzreihen zu beschränken, die Zweige einer algebraischen Funktion darstellen, sondern kann allgemeiner untersuchen, ob eine vorgelegte Potenzreihe für unendlich viele ganzzahlige Werte des Arguments ganz sein kann.

Der Satz A läßt sich, etwas allgemeiner als es in der Einleitung getan wurde, folgendermaßen formulieren [1]: Die Reihe

$$y = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 + b_{-1} x^{-1} + \cdots \tag{35}$$

möge außerhalb eines gewissen Kreises konvergieren und stelle keine ganze rationale Funktion von x dar. Sind die Zahlen $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1$ rational, so hat die Gleichung (35) nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen Zahlen x, y.

Dieser Satz läßt folgende Erweiterung zu, bei der der höchste Koeffizient nicht mehr rational, sondern nur algebraisch zu sein braucht. Der höchste auftretende Exponent von x kann von vornherein positiv angenommen werden, da man sonst nur den Satz A erhält.

XIII. **Satz 5:** *Es seien d, d', p, q und r ganze rationale positive Zahlen, p und q seien teilerfremd, a_0 sei eine algebraische Zahl und zwar sei a_0^q eine algebraische Zahl n-ten Grades. Die Reihe*

$$y = a_0 x^{\frac{p}{q}} + a_r x^{\frac{dp-r}{dq}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{r+\nu} x^{\frac{d'(dp-r)-\nu}{d'dq}} \tag{36}$$

sei für hinreichend große $|x|$ konvergent. Unter $x^{\frac{1}{d'dq}}$ sei ein fester der $d'dq$ Werte von $\sqrt[d'dq]{x}$ verstanden; es sei $a_r \neq 0$. Man setze

$$s = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{4n+1} - 1\right)\right],$$

$$z = \frac{n}{s+1} + s.$$

Ist dann

$$r > dpqz, \tag{37}$$

so hat (36) höchstens endlich viele Lösungen in ganzen rationalen Zahlen x, y.

Beweis: Es seien x und y ganze rationale Zahlen, die der Gleichung (36) genügen. Aus (36) folgt für hinreichend große $|x|$ und eine geeignete positive Konstante Γ

$$|y - a_0 x^{\frac{p}{q}}| < \Gamma |x|^{\frac{dp-r}{dq}};$$

folglich ist

[1]) *Sk.* oder *P.-Sz.*

$$\left| \frac{y}{x^{\frac{p}{q}}} - a_0 \right| < \Gamma |x|^{\frac{-r}{dq}}.$$

Nur für endlich viele Lösungen von (36) kann

$$\frac{y}{x^{\frac{p}{q}}} - a_0 = 0$$

sein, da

$$a_r x^{\frac{dp-r}{dq}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{r+\nu} x^{\frac{d'(dp-r)-\nu}{d'dq}}$$

eine in einer gewissen Umgebung von $x = \infty$ konvergente Potenzreihe ist, also im Innern ihres Konvergenzkreises, abgesehen von einer algebraischen Singularität in $x = \infty$, eine analytische Funktion darstellt und daher dort nur endlich oft verschwinden kann. Diese endlich vielen Lösungspaare lasse man im folgenden außer Acht. Für alle übrigen Lösungen von (36) ist daher

$$0 < \left| \frac{y}{x^{\frac{p}{q}}} - a_0 \right| < \Gamma |x|^{-\frac{r}{dq}}. \tag{38}$$

Ferner folgt aus (36) für hinreichend großes $|x|$ und eine geeignete Konstante $C' > 1$

$$|y^q| < C' |x|^p.$$

Demnach ist, da x und y ganz und rational sind,

$$H\left(\frac{y^q}{x^p}\right) < C' |x|^p. \tag{39}$$

Wegen (37) kann man eine Zahl $\varepsilon_0 > 0$ so wählen, daß

$$r - dpqz > dpq\, \varepsilon_0 > 0 \tag{40}$$

ist. Nun ergibt sich aus Satz 3 a für $\mathsf{K} = \mathsf{P}$, daß für $C = \Gamma C'^{z+\varepsilon_0}$ abgesehen von höchstens endlich vielen Wertepaaren ganzer rationaler Zahlen x, y wegen (39) und (40) die Ungleichung gilt:

$$\left| a_0 - \sqrt[q]{\frac{y^q}{x^p}} \right| > \frac{C}{\left\{H\left(\frac{y^q}{x^p}\right)\right\}^{z+\varepsilon_0}} > \frac{C}{(C'|x|^p)^{z+\varepsilon_0}} = \frac{\Gamma}{|x|^{p(z+\varepsilon_0)}} > \Gamma |x|^{-\frac{r}{dq}},$$

da $|x| > 1$ angenommen werden kann. Dies steht im Widerspruch zur Ungleichung (38). Daher gibt es höchstens endlich viele ganze rationale Lösungspaare x, y von (36).

Bemerkung: Häufig wird Satz 5 erst nach Ausführung einer Substitution anwendbar sein. Insbesondere kann man durch eine Substitution Glieder der Reihe mit nichtnegativen ganzzahligen Exponenten und rationalen Koeffizienten fortschaffen und dadurch die Lücke vergrößern. Ferner kann man einen analogen Satz aufstellen, wenn statt hinter dem ersten Glied der Reihe an einer späteren Stelle der Reihe eine hinreichend große Lücke auftritt. Diese Bemerkung gilt auch für die folgenden Sätze dieses Paragraphen.

XIV. **Hilfssatz 2:** *Es sei $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von x und y mit Koeffizienten aus dem algebraischen Zahlkörper $\mathsf{P}(\vartheta)$, der den Grad h habe. Eine der Reihenentwicklungen der durch $f(x, y) = 0$ definierten algebraischen Funktion von x in der Umgebung der Stelle $x = \infty$ sei*

$$y = a_0 x^{\frac{p}{q}} + b_0 x^t + \cdots = \mathfrak{P}^{(0)}(x^{\frac{1}{dq}});$$

a_0^q sei eine algebraische Zahl n-ten Grades in bezug auf $\mathsf{P}(\vartheta)$. *Drückt man in* $f(x, y)$ *die Koeffizienten durch* ϑ *aus und ersetzt* ϑ *durch eine seiner Konjugierten* $\vartheta^{(\lambda)}$, *so erhält man eine ganze rationale Funktion* $f^{(\lambda)}(x, y)$. *Dann hat für* $\lambda = 1, 2, \ldots, h-1$ *eine der Reihenentwicklungen der durch* $f^{(\lambda)}(x, y) = 0$ *definierten Funktion von* x *in der Umgebung der Stelle* $x = \infty$ *die Form*

$$y = a_\lambda x^{\frac{p}{q}} + b_\lambda x^{\ldots} + \cdots,$$

wo a_λ^q *vom Grade n in bezug auf* $\mathsf{P}(\vartheta^{(\lambda)})$ *ist.*

Beweis: Nach einem bekannten Satz [1]) gehören die Koeffizienten von $\mathfrak{P}^{(0)}(x^{\frac{1}{dq}})$ sämtlich einem algebraischen Zahlkörper über $\mathsf{P}(\vartheta)$ an; es sei dies der Körper $\mathsf{P}(\zeta)$. Ferner sei $\vartheta = \psi(\zeta)$; die Numerierung der Konjugierten $\zeta^{(\nu)}$ von ζ sei so gewählt, daß für $\lambda = 1, 2, \ldots, h-1$

$$\vartheta^{(\lambda)} = \psi(\zeta^{(\lambda)})$$

ist. Nun ist

$$f\{x, \mathfrak{P}^{(0)}(x^{\frac{1}{dq}})\} = 0. \tag{41}$$

Diese Identität ist gleichbedeutend mit dem Bestehen von unendlich vielen Identitäten, die man aus der Tatsache erhält, daß in (41) die Koeffizienten aller Potenzen von $x^{\frac{1}{dq}}$ verschwinden. Die in ihnen auftretenden Größen sind als Koeffizienten von $f(x, y)$ und $\mathfrak{P}^{(0)}(x^{\frac{1}{dq}})$ sämtlich Zahlen aus $\mathsf{P}(\zeta)$; drückt man sie durch ζ aus und ersetzt ζ durch $\zeta^{(\lambda)}$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, h-1$, so bleiben alle Identitäten erhalten, da jede von ihnen nur endlich viele Glieder enthält. Ist daher $\mathfrak{P}^{(\lambda)}(x^{\frac{1}{dq}})$ diejenige Reihe, die man formal erhält, wenn man ζ durch $\zeta^{(\lambda)}$ in den Koeffizienten von $\mathfrak{P}^{(0)}(x^{\frac{1}{dq}})$ ersetzt, so folgt aus (41)

$$f^{(\lambda)}\{x, \mathfrak{P}^{(\lambda)}(x^{\frac{1}{dq}})\} = 0.$$

Also ist

$$y = \mathfrak{P}^{(\lambda)}(x^{\frac{1}{dq}})$$

eine der Reihenentwicklungen der durch $f^{(\lambda)}(x, y) = 0$ definierten Funktion von x in der Umgebung von $x = \infty$. Diese Entwicklung hat die behaupteten Eigenschaften.

XV. Für ganze algebraische Zahlen, die nicht rational sind, gilt der Satz A und die *Runge*schen Resultate über diophantische Gleichungen nicht mehr. Dies zeigt schon das Beispiel

$$y = \frac{1}{x};$$

hier wird, wenn x eine Einheit eines algebraischen Körpers ist, auch y eine solche. Dagegen gilt

Satz 6: *Es sei* $f(x, y)$ *eine ganze rationale Funktion in* x *und* y *mit Koeffizienten aus dem algebraischen Zahlkörper* K, *dessen Grad h sei. Die Potenzreihenentwicklungen der sämtlichen Zweige der durch* $f(x, y) = 0$ *definierten algebraischen Funktion von* x *in der Umgebung der Stelle* $x = \infty$ *seien*

[1]) Vgl. *R.* S. 430 oder *G. Pólya* und *G. Szegö*, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II, Berlin Springer (1925), Abschnitt VIII Aufgabe 235 S. 156.

$$y_\nu = a_{0\nu} x^{\frac{p_\nu}{q_\nu}} + a_{r_\nu \nu} x^{\frac{d_\nu p_\nu - r_\nu}{d_\nu q_\nu}} + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{r_\nu+\mu,\nu} x^{\frac{d_\nu(d_\nu p_\nu - r_\nu)-\mu}{d'_\nu d_\nu q_\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Für jeden Wert von ν seien p_ν und q_ν teilerfremd, $q_\nu > 0$, $a_{r_\nu\nu} \neq 0$; $a_{0\nu}^{q_\nu}$ sei vom Grade n_ν in bezug auf K. *Man setze*

$$(42) \qquad \begin{cases} s_\nu = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{4n_\nu + 1} - 1\right)\right], \\ z_\nu = \frac{n_\nu}{s_\nu + 1} + s_\nu . \end{cases}$$

Ist dann für $\nu = 1, 2, \ldots, N$ und ein beliebiges $\gamma \geqq 0$

$$(43) \qquad r_\nu > d_\nu h\, q_\nu\, z_\nu\, (|p_\nu| + \gamma),$$

so gibt es unter den Lösungspaaren der diophantischen Gleichung

$$(44) \qquad f(x, y) = 0$$

in ganzen Zahlen x, y aus K *höchstens endlich viele, für die für alle ν*

$$(45) \qquad \begin{cases} \text{Max}\{|y|, \ |y'|, \ldots, |y^{(h-1)}|\}^{q_\nu} \leqq C \cdot \text{Max}\{|x|, \ |x'|, \ldots, |x^{(h-1)}|\}^{p_\nu+\gamma} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } p_\nu \geqq 0, \\ \text{Max}\{|y|, \ |y'|, \ldots, |y^{(h-1)}|\}^{q_\nu} \leqq C \cdot \text{Max}\{|x|, \ |x'|, \ldots, |x^{(h-1)}|\}^{\gamma} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } p_\nu < 0 \end{cases}$$

ist, wo $y', y'', \ldots, y^{(h-1)}$ und $x', x'', \ldots, x^{(h-1)}$ die Konjugierten von y und x bedeuten und C eine beliebige feste positive Konstante ist.

Beweis: Angenommen, es gäbe unendlich viele Lösungen der Gleichung (44) in ganzen Zahlen aus K, die außerdem der Bedingung (45) genügen, so betrachte man nur diese Lösungspaare. Ist dann ϑ eine den Körper K erzeugende Zahl, $\vartheta', \vartheta'', \ldots, \vartheta^{(h-1)}$ ihre Konjugierten und

$$x = A(\vartheta), \quad y = B(\vartheta)$$

ein Lösungspaar von (44), das der Bedingung (45) genügt, so ist

$$\left.\begin{aligned} x^{(\lambda)} &= A(\vartheta^{(\lambda)}), \\ y^{(\lambda)} &= B(\vartheta^{(\lambda)}) \end{aligned}\right\} \ \lambda = 1, 2, \ldots, h-1$$

ein Lösungspaar derjenigen Gleichung, die aus (44) entsteht, wenn man die Koeffizienten durch ϑ ausdrückt und ϑ durch $\vartheta^{(\lambda)}$ ersetzt. Hat daher (44) unendlich viele Lösungen aus K, so hat jede der auf diese Weise aus (44) entstehenden Gleichungen unendlich viele Lösungen aus $\mathsf{P}(\vartheta^{(\lambda)}) = \mathsf{K}^{(\lambda)}$, die der Bedingung (45) genügen. Unter ihnen muß es daher mindestens eine geben, für die unendlich oft der absolute Betrag des zugehörigen $x^{(\lambda)}$ nicht kleiner ist als die absoluten Beträge seiner Konjugierten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß dies die Gleichung (44) selbst ist, denn die Reihenentwicklungen der konjugierten diophantischen Gleichungen erfüllen nach Hilfssatz 2 in bezug auf den jeweiligen Grundkörper dieselben Voraussetzungen wie die Reihenentwicklungen von (44).

Man betrachte jetzt nur noch die unendlich vielen Lösungspaare x, y aus K von (44), für die die Bedingung (45) erfüllt ist und für die außerdem

$$(46) \qquad |x| = \text{Max}\{|x|, |x'|, \ldots, |x^{(h-1)}|\}$$

gilt. Unter diesen Lösungen muß es ferner unendlich viele solche geben, für die

$$(47) \qquad |x| > C_1$$

ist, wo C_1 eine beliebige positive Konstante ist, über die später noch verfügt werden wird, da es nur endlich viele ganze Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers gibt, die mit ihren sämtlichen Konjugierten absolut kleiner als eine feste Konstante sind.

Endlich muß es unter den Zweigen der durch (44) definierten algebraischen Funktion von x mindestens einen geben, der unendlich viele Lösungspaare liefert, die den Bedingungen (45), (46) und (47) genügen.

Unter Abänderung der Bezeichnung sei die Entwicklung dieses Zweiges in der Umgebung des Punktes $x = \infty$

$$y = a_0 x^{\frac{p}{q}} + a_r x^{\frac{dp-r}{dq}} + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{r+\mu} x^{\frac{d'(dp-r)-\mu}{d'dq}} . \tag{48}$$

Es sei a_0^q vom Grade n in bezug auf K; man setze

$$\begin{cases} s = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{4n+1} - 1\right)\right], \\ z = \frac{n}{s+1} + s. \end{cases} \tag{49}$$

Dann folgt aus (42) und (43)

$$r > dhqz\,(|p| + \gamma). \tag{50}$$

Aus der Annahme, daß (44) unendlich viele ganzzahlige Lösungen aus K besitzt, die der Bedingung (45) genügen, folgt also, daß es auch unendlich viele ganzzahlige Lösungen aus K von (48) gibt, die außerdem den Bedingungen (45), (46) und (47) genügen. Eine Lösung von (48), die diesen Bedingungen genügt, soll kurz eine ausgezeichnete heißen. Es soll nun gezeigt werden, daß höchstens endlich viele ausgezeichnete Lösungen vorhanden sein können.

Es sei also x, y ein ausgezeichnetes Lösungspaar. Die Konstante $C_1 > 1$ sei so groß gewählt, daß aus (48) für $|x| > C_1$ und eine geeignete Konstante Γ analog wie beim Beweise des Satzes 5 die Ungleichung

$$0 < \left| \frac{y}{x^{\frac{p}{q}}} - a_0 \right| < \Gamma\,|x|^{-\frac{r}{dq}} \tag{51}$$

folgt. Nun ist wegen (46)

$$|(x^{(\nu)})^{|p|}| \leqq |x^{|p|}| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, h-1)$$

und wegen (45)

$$\left.\begin{array}{ll} |y^{(\nu)q}| < C\,|x|^{p+\gamma} & \text{für } p \geqq 0 \\ |y^{(\nu)q}| < C\,|x|^{\gamma} & \text{für } p < 0 \end{array}\right\} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, h-1;\ y^{(0)} = y).$$

Ist daher M für $p \geqq 0$ das Maximum der $2h$ ganzen Zahlen aus K:

$$x^{(\nu)p},\ y^{(\nu)q} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, h-1;\ x^{(0)} = x)$$

und für $p < 0$ das Maximum der h ganzen Zahlen aus K:

$$(x^{(\nu)})^{-p} \cdot y^{(\nu)q} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, h-1),$$

so ist in beiden Fällen

$$M < C\,|x|^{|p|+\gamma}. \tag{52}$$

Wegen (50) läßt sich eine Zahl $\varepsilon > 0$ angeben, derart daß

$$r > dhq\,(|p| + \gamma)\,(z + \varepsilon) \tag{53}$$

ist. Dann folgt aus Satz 4, daß für $C_2 = \Gamma C^{h(z+\varepsilon)}$ für alle ausgezeichneten Lösungs-

paare x, y von (48), abgesehen von höchstens endlich vielen Ausnahmefällen, wegen (49), (52) und (53) die Ungleichung gilt:

$$\left| \sqrt[q]{\frac{y^q}{x^p}} - a_0 \right| > \frac{C_2}{M^{h(z+\varepsilon)}} > \frac{C_2}{(C\,|x|^{|p|+\gamma})^{h(z+\varepsilon)}} = \frac{\Gamma}{|x|^{h(|p|+\gamma)(z+\varepsilon)}} > \Gamma\,|x|^{-\frac{r}{dq}}.$$

Dies steht im Widerspruch zu (51). Daher hat die Gleichung (44) höchstens endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x, y aus K, für die die Bedingung (45) erfüllt ist.

Bemerkung: Häufig wird es vorteilhaft sein, Reihenentwicklungen einzelner Zweige, in denen das zugehörige $p_\nu < 0$ ist, als Reihen der Form

$$y_\nu = 0 + a_{0\nu}\, x^{\frac{p_\nu}{q_\nu}} + \cdots$$

aufzufassen und die rationale Zahl 0 zu approximieren.

XVI. Satz 6 läßt sich, wie man sofort sieht, auch für Reihen aussprechen, die nicht Reihenentwicklungen algebraischer Funktionen sind. Es gilt:

Zusatz 1: *Es seien d, p, q, r ganze rationale Zahlen, $d > 0$, $q > 0$; p und q seien teilerfremd, a_0 sei eine algebraische Zahl und zwar sei a_0^q vom Grade n in bezug auf den Normalkörper* K, *der den Grad h habe. Die Reihe*

$$y = a_0\, x^{\frac{p}{q}} + a_r\, x^{\frac{dp-r}{dq}} + \cdots \tag{54}$$

sei für hinreichend große $|x|$ konvergent; es sei $a_r \neq 0$. Man setze

$$s = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{4n+1} - 1\right)\right],$$

$$z = \frac{n}{s+1} + s.$$

Ist dann für ein beliebiges $\gamma \geqq 0$

$$r > hd\,(|p| + \gamma)\,qz,$$

so gibt es unter den Lösungen von (54) *in ganzen Zahlen x, y aus* K *höchstens endlich viele, für die, wenn $x', x'', \ldots, x^{(h-1)}$ und $y', y'', \ldots, y^{(h-1)}$ die Konjugierten von x und y sind, gleichzeitig mit x, y auch $x^{(\lambda)}, y^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, h-1)$ eine Lösung von* (54) *ist und für die ferner für eine beliebige feste positive Konstante C die Ungleichung gilt:*

$$\operatorname{Max}\{|y|, |y'|, \ldots, |y^{(h-1)}|\}^q < C \cdot \operatorname{Max}\{|x|, |x'|, \ldots, |x^{(h-1)}|\}^{p+\gamma} \quad \text{für } p \geqq 0,$$

$$\operatorname{Max}\{|y|, |y'|, \ldots, |y^{(h-1)}|\}^q < C \cdot \operatorname{Max}\{|x|, |x'|, \ldots, |x^{(h-1)}|\}^{\gamma} \quad \text{für } p < 0.$$

XVII. **Zusatz 2:** *Die Funktion $f(x, y)$ genüge den im Satz 6 gemachten Voraussetzungen, doch mögen ihre Koeffizienten rationale Zahlen sein;* K *sei ein Normalkörper. Ferner sei*

$$\gamma \geqq \operatorname{Max}\left\{\frac{p_\mu q_\nu}{q_\mu} - \frac{p_\nu}{2}(1 + \operatorname{sign} p_\nu)\right\} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, N). \tag{55}$$

Das Maximum der absoluten Beträge der im Endlichen gelegenen singulären Werte von x der durch $f(x, y) = 0$ definierten algebraischen Funktion sei S. Dann hat die diophantische Gleichung $f(x, y) = 0$ entweder nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x, y aus K, *oder es liegt im Innern oder auf dem Rande des Kreises mit S um den Nullpunkt der x-Ebene mindestens ein Häufungspunkt von Lösungswerten x.*

Beweis: Die Reihenentwicklungen der durch $f(x, y) = 0$ definierten Funktion von x in der Umgebung des Punktes $x = \infty$:

$$y_\nu = a_{0\nu} x^{\frac{p_\nu}{q_\nu}} + a_{r_\nu \nu} x^{\frac{d_\nu p_\nu - r_\nu}{d_\nu q_\nu}} + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{r_\nu+\mu,\nu} x^{\frac{d'_\nu(d_\nu p_\nu - r_\nu)-\mu}{d'_\nu d_\nu q_\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

konvergieren außerhalb des Kreises mit S um den Nullpunkt. Hieraus folgt

$$\frac{y_\nu}{x^{\frac{p_\nu}{q_\nu}}} = a_{0\nu} + \mathfrak{P}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N),$$

wo $\mathfrak{P}_\nu$ eine gewöhnliche Potenzreihe in $x^{\frac{1}{d'_\nu d_\nu q_\nu}}$ ist, die außerhalb des Kreises mit dem Radius S konvergiert und also für jedes $\delta > 0$ auf der Peripherie und außerhalb des Kreises mit dem Radius $S + \delta$ um den Nullpunkt beschränkt ist. Daher läßt sich eine Konstante Γ angeben, derart daß für $|x| \geqq S + \delta$

$$(56) \qquad \left.\begin{array}{ll} |y_\nu^{q_\nu}| < \Gamma |x|^{p_\nu} & \text{für } p_\nu \geqq 0 \\ |y_\nu^{q_\nu}| < \Gamma & \text{für } p_\nu < 0 \end{array}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

ist. Nun hatte $f(x, y)$ rationale Koeffizienten und K war ein Normalkörper; daher liefern gleichzeitig mit x, y auch ihre Konjugierten $x^{(\lambda)}$, $y^{(\lambda)}$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, h-1$ Lösungen von (44) aus K.

Es sei x, y eine solche Lösung, für die

$$(57) \qquad |x^{(\lambda)}| \geqq S + \delta \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, h-1)$$

ist. Ferner sei

$$(58) \qquad \left.\begin{array}{l} |x^{(\varrho)}| = \mathrm{Max}\,\{|x|, |x'|, \ldots, |x^{(\varrho)}|, \ldots, |x^{(h-1)}|\}, \\ |y^{(\sigma)}| = \mathrm{Max}\,\{|y|, |y'|, \ldots, |y^{(\sigma)}|, \ldots, |y^{(h-1)}|\}. \end{array}\right.$$

Dann ist nach einem bekannten Satz $|x^{(\varrho)}| \geqq 1$. Es sei $y^{(\sigma)}$ ein Wert des Zweiges y_σ. Aus (55) folgt

$$\frac{p_\sigma}{q_\sigma} \leqq \frac{\gamma}{q_\nu} + \frac{p_\nu}{2q_\nu}(1 + \mathrm{sign}\, p_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Daher ist wegen (56) und (58) für $\nu = 1, 2, \ldots, N$

$$(59) \qquad \left\{\begin{array}{ll} |y^{(\sigma)}| < |\Gamma^{\frac{1}{q_\sigma}}|\, |x^{(\sigma)\frac{p_\sigma}{q_\sigma}}| \leqq |\Gamma^{\frac{1}{q_\sigma}}|\, |x^{(\varrho)\frac{p_\sigma}{q_\sigma}}| \leqq |\Gamma^{\frac{1}{q_\sigma}}|\, |x^{(\varrho)\frac{\gamma}{q_\nu} + \frac{p_\nu}{2q_\nu}(1+\mathrm{sign}\, p_\nu)}| & \text{für } p_\sigma \geqq 0, \\ |y^{(\sigma)}| < |\Gamma^{\frac{1}{q_\sigma}}| \leqq |\Gamma^{\frac{1}{q_\sigma}}| \cdot |x^{(\varrho)\frac{\gamma}{q_\nu} + \frac{p_\nu}{2q_\nu}(1+\mathrm{sign}\, p_\nu)}| & \text{für } p_\sigma < 0. \end{array}\right.$$

Setzt man

$$C = \mathrm{Max}\,\{|\Gamma^{\frac{q_1}{q_\sigma}}|, |\Gamma^{\frac{q_2}{q_\sigma}}|, \ldots, |\Gamma^{\frac{q_N}{q_\sigma}}|\},$$

so folgt aus (59) in beiden Fällen

$$\begin{array}{ll} |y^{(\sigma)}|^{q_\nu} < C\, |x^{(\varrho)}|^{\gamma + p_\nu} & \text{für } p_\nu \geqq 0, \\ |y^{(\sigma)}|^{q_\nu} < C\, |x^{(\varrho)}|^{\gamma} & \text{für } p_\nu < 0. \end{array}$$

Dies liefert aber wegen (58) die Bedingung (45). Daher gibt es nach Satz 6 nur endlich viele Lösungen, für die die Bedingung (57) erfüllt ist. Hat also (44) unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen aus K, so muß für jedes Lösungspaar, abgesehen von endlich vielen Ausnahmefällen, mindestens eine der Konjugierten von x innerhalb des Kreises mit dem Radius $S + \delta$ liegen. Da dies für jedes $\delta > 0$ gilt, müssen innerhalb oder auf dem Rande des Kreies mit S um den Nullpunkt unendlich viele Lösungswerte x liegen. Daher liegt im Innern oder auf dem Rande dieses Kreises mindestens ein Häufungspunkt von Lösungswerten x.

Der Zusatz 2 liefert also einen Zusammenhang zwischen den Singularitäten der durch $f(x, y) = 0$ definierten algebraischen Funktion von x und den Lösungen der diophantischen Gleichung $f(x, y) = 0$ in Zahlen aus K. Da mit x, y auch die konjugiert komplexen Zahlen $\bar{x}, \bar{y}$ eine Lösung liefern, weil $f(x, y)$ rationale Koeffizienten hatte, folgt sofort, daß auch im Innern oder auf dem Rande jedes der beiden Halbkreise, in die die reelle Achse den Kreis mit S zerlegt, mindestens ein Häufungspunkt von Lösungswerten x liegen muß. In einigen Spezialfällen kann man statt des Kreises mit S um den Nullpunkt den kleinsten Kreis nehmen, der alle singulären Werte x im Innern oder auf dem Rande enthält. Hierauf soll jedoch nicht näher eingegangen werden.

XVIII. Läßt man als Lösungen der diophantischen Gleichung nicht nur Zahlen eines festen algebraischen Körpers, sondern alle ganzen algebraischen Zahlen von beschränktem Grade zu, so erhält man den folgenden

Satz 7: *Es sei $f(x, y)$ eine ganze rationale Funktion in x und y mit Koeffizienten aus dem algebraischen Zahlkörper* K, *der den Grad h habe. Die Reihenentwicklungen der sämtlichen Zweige der durch $f(x, y) = 0$ definierten Funktion von x in der Umgebung der Stelle $x = \infty$ seien*

$$y_\nu = a_{0\nu} x^{\frac{p_\nu}{q_\nu}} + a_{r_\nu \nu} x^{\frac{d_\nu p_\nu - r_\nu}{d_\nu q_\nu}} + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{r_\nu+\mu,\,\nu} x^{\frac{d'_\nu(d_\nu p_\nu - r_\nu)-\mu}{d'_\nu d_\nu q_\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Hierbei sei $(p_\nu, q_\nu) = 1$; $q_\nu > 0$, $d_\nu > 0$; $a_{r_\nu} \neq 0$; $a_{0\nu}^{q_\nu}$ sei vom Grade n_ν in bezug auf den Körper P. *Es sei h_0 eine positive ganze rationale Zahl. Man setze*

$$(60) \qquad \begin{cases} s_\nu = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{4n_\nu + 1} - 1\right)\right], \\ z_\nu = \operatorname{Min}\left\{n_\nu, h_0^2\left(\frac{n_\nu}{s_\nu + 1} + s_\nu\right)\right\}. \end{cases}$$

Ist dann für $\nu = 1, 2, \ldots, N$ und ein beliebiges $\gamma \geqq 0$

$$(61) \qquad r_\nu > d_\nu h_0^2 q_\nu z_\nu (|p_\nu| + \gamma),$$

so hat die diophantische Gleichung

$$(62) \qquad f(x, y) = 0$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen algebraischen Zahlen x, y, deren Grade $h_1 \leqq h_0$ bzw. $h_2 \leqq h_0$ in bezug auf P *sind und für die für alle ν die Bedingung gilt:*

$$(63) \qquad \begin{cases} \operatorname{Max}\{|y|, |y'|, \ldots, |y^{(h_2-1)}|\}^{q_\nu} \leqq C \cdot \operatorname{Max}\{|x|, |x'|, \ldots, |x^{(h_1-1)}|\}^{p_\nu+\gamma} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } p_\nu \geqq 0, \\ \operatorname{Max}\{|y|, |y'|, \ldots, |y^{(h_2-1)}|\}^{q_\nu} \leqq C \cdot \operatorname{Max}\{|x|, |x'|, \ldots, |x^{(h_1-1)}|\}^{\gamma} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } p_\nu < 0, \end{cases}$$

wo $y', y'', \ldots, y^{(h_2-1)}$ und $x', x'', \ldots, x^{(h_1-1)}$ die Konjugierten von y und x bedeuten und C eine beliebige feste positive Konstante ist.

Beweis: Es sei ϑ eine den Körper K erzeugende Zahl, $\vartheta', \vartheta'', \ldots, \vartheta^{(h-1)}$ ihre Konjugierten. Drückt man die Koeffizienten von $f(x, y)$ durch ϑ aus und ersetzt ϑ durch $\vartheta^{(\lambda)}$, so erhält man Polynome, die mit $f^{(\lambda)}(x, y)$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, h-1)$ bezeichnet werden mögen. Man setze

$$(64) \qquad F(x, y) = \prod_{\lambda=0}^{h-1} f^{(\lambda)}(x, y).$$

Dann hat $F(x, y)$ rationale Koeffizienten. Nun sei $x_0 = x_0^{(0)}$, $y_0 = y_0^{(0)}$ eine Lösung von (62), $x_0', x_0'', \ldots, x_0^{(h_1-1)}$ bzw. $y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(h_2-1)}$ ihre Konjugierten. Die Gleichung in x

$$\prod_{\sigma=0}^{h_2-1} F(x, y_0^{(\sigma)}) = 0$$

hat rationale Koeffizienten und die Wurzel $x = x_0$, also hat sie auch die Wurzeln $x_0', x_0'', \ldots, x_0^{(h_1-1)}$. Daher gibt es zu jedem $x_0^{(\varrho)}$ mindestens ein $y_0^{(\sigma)}$, derart daß $x_0^{(\varrho)}, y_0^{(\sigma)}$ eine Lösung von $F(x, y) = 0$ und daher wegen (64) eine Lösung von (62) oder von einer der konjugierten Gleichungen ist. Hätte nun (62) unendlich viele Lösungen, die der Bedingung (63) genügen, so folgt, analog wie beim Beweise von Satz 6, daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen könnte, daß mindestens ein Zweig der durch $f(x, y) = 0$ definierten algebraischen Funktion von x unendlich viele ausgezeichnete Lösungen besitzt. Unter Abänderung der Bezeichnung sei die Reihenentwicklung dieses Zweiges in der Umgebung von $x = \infty$

$$y = a_0 x^{\frac{p}{q}} + a_r x^{\frac{dp-r}{dq}} + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{r+\mu} x^{\frac{d'(dp-r)-\mu}{d'dq}}. \tag{65}$$

Es sei a_0^q vom Grade n in bezug auf den Körper P. Man setze

$$\begin{cases} s = \left[\frac{1}{2}(\sqrt{4n+1} - 1)\right], \\ z = \text{Min}\left\{n, h_0^2\left(\frac{n}{s+1} + s\right)\right\}. \end{cases} \tag{66}$$

Dann folgt aus (60) und (61)

$$r > d h_0^2 q z (|p| + \gamma). \tag{67}$$

Nun sei x, y ein ausgezeichnetes Lösungspaar von (65). Die Konstante $C_1 > 1$ sei so groß gewählt, daß aus (65) für $|x| > C_1$ und für eine geeignete Konstante Γ analog wie beim Beweis des Satzes 5 die Ungleichung

$$0 < \left| \frac{y}{x^{\frac{p}{q}}} - a_0 \right| < \Gamma x^{-\frac{r}{dq}} \tag{68}$$

folgt. Nun genügt $\frac{y^q}{x^p}$ in P der Gleichung

$$\begin{cases} \varphi(Z) = \prod_{\varkappa=0}^{h_1-1} \prod_{\lambda=0}^{h_2-1} \{x^{(\varkappa)p} Z - y^{(\lambda)q}\} = 0 & \text{für } p \geqq 0, \\ \varphi(Z) = \prod_{\varkappa=0}^{h_1-1} \prod_{\lambda=0}^{h_2-1} \{Z - (x^{(\varkappa)})^{|p|} y^{(\lambda)q}\} = 0 & \text{für } p < 0. \end{cases} \tag{69}$$

Da x, y eine ausgezeichnete Lösung war, ist

$$|x^{(\varkappa)}|^{|p|} \leqq |x|^{|p|} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, h_1 - 1).$$

Wegen (63) ist

$$\left.\begin{array}{ll} |y^{(\lambda)}|^q < C|x|^{p+\gamma} & \text{für } p \geqq 0 \\ |y^{(\lambda)}|^q < C|x|^{\gamma} & \text{für } p < 0 \end{array}\right\} \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, h_2 - 1).$$

In den einzelnen Faktoren von (69) ist daher in beiden Fällen jeder Koeffizient absolut $\leqq C|x|^{|p|+\gamma}$, folglich jeder Koeffizient von $\varphi(Z)$ absolut sicher kleiner als

$$2^{h_1 h_2} C^{h_1 h_2} |x|^{(|p|+\gamma) h_1 h_2} < C_2 |x|^{h_0^3 (|p|+\gamma)},$$

wo C_2 eine Konstante ist. Ist nun $\varphi(Z)$ in P irreduzibel, so folgt hieraus

$$H\left(\frac{y^q}{x^p}\right) < C_2 |x|^{h_0^3 (|p|+\gamma)}.$$

Ist dagegen $\varphi(Z)$ in P reduzibel,

$$\varphi(Z) = \psi(Z)\,\chi(Z),$$

$\psi(Z) = 0$ die irreduzible Geichung, der $\frac{y^q}{x^p}$ in P genügt, so folgt aus

$$\psi(Z) = \frac{\varphi(Z)}{\chi(Z)}$$

durch mehrmalige Anwendung des Satzes F, daß sich eine Konstante $C_3 > C_2$ angeben läßt, derart daß in allen Fällen

$$H\left(\frac{y^q}{x^p}\right) < C_3 |x|^{h_0^2(|p|+\gamma)} \tag{70}$$

ist. Wegen (67) läßt sich eine Zahl $\varepsilon > 0$ angeben, derart daß

$$r > dh_0^2 q(|p| + \gamma)(z + \varepsilon) \tag{71}$$

ist. Ferner ist $\frac{y^q}{x^p}$ eine algebraische Zahl höchstens vom Grade h_0^2. Daher folgt aus Satz 3 b, daß für $C_4 = \Gamma C_3^{z+\varepsilon}$, abgesehen von höchstens endlich vielen Ausnahmefällen, für die ausgezeichneten Lösungspaare x, y von (62) wegen (66), (70) und (71) die Ungleichung gilt:

$$\left|\sqrt[q]{\frac{y^q}{x^p}} - a_0\right| > \frac{C_4}{\left\{H\left(\frac{y^q}{x^p}\right)\right\}^{z+\varepsilon}} > \frac{\Gamma C_3^{z+\varepsilon}}{\{C_3 |x|^{h_0^2(|p|+\gamma)}\}^{z+\varepsilon}} > \Gamma |x|^{-\frac{r}{dq}}.$$

Dies steht im Widerspruch zu (68). Also gibt es höchstens endlich viele Lösungen von (62), für die die Bedingung (63) erfüllt ist.

Auch hier lassen sich analoge Zusätze wie beim Satz 6 aufstellen.

§ 3. Anwendungen der Kriterien.

XIX. **Hilfssatz 3:** *Es sei $U(x, y)$ eine ganze rationale homogene Funktion der Dimension n ohne mehrfache Linearfaktoren, in der die Koeffizienten von x^n und y^n von 0 verschieden sind. $V_1(x, y), V_2(x, y), \ldots, V_k(x, y)$ seien ganze rationale Funktionen in x und y, deren Gesamtgrade $v_1, v_2, , \ldots, v_k$ seien; die Summe der Glieder von der Dimension v_k in $V_k(x, y)$ sei zu $U(x, y)$ teilerfremd. Ferner sei*

$$\begin{cases} v_\varrho \leqq \dfrac{v_k\,\varrho}{k} & (\varrho = 1, 2, \ldots, k-1), \\ v_k \leqq k(n-1)\ ^1). \end{cases} \tag{72}$$

Man setze

$$t = \frac{-v_k + k(n-1)}{k}. \tag{73}$$

Dann sind die sämtlichen kn Reihenentwicklungen der durch die Gleichung

$$U(x, y)^k + U(x, y)^{k-1} V_1(x, y) + U(x, y)^{k-2} V_2(x, y) + \cdots + U(x, y) V_{k-1}(x, y) + V_k(x, y) = 0 \tag{74}$$

definierten Funktion von x in der Umgebung der Stelle $x = \infty$ von der Form

$$y_\nu = \alpha_\nu x + \beta_\nu x^{-t} + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, kn);$$

hierbei ist α_ν eine Wurzel der Gleichung

[1]) Es genügt, $v_k < kn$ vorauszusetzen; doch wird der Beweis dann ein wenig umständlicher.

$$U(1, y) = 0.$$

Beweis: Es sei

$$U(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n \qquad (a_0 \neq 0,\ a_n \neq 0). \tag{75}$$

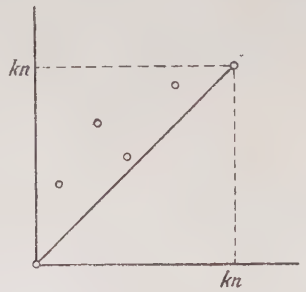
Wegen (72) ist der Gesamtgrad jedes Gliedes in $U(x, y)^{k-\varrho} V_\varrho(x, y)$ für $\varrho = 1, 2, \ldots, k$ kleiner oder gleich

$$(k - \varrho) n + v_\varrho \leqq (k - \varrho) n + \frac{v_k \varrho}{k} < (k - \varrho) n + n \varrho = kn.$$

Daher sind in $U(x, y)^{k-\varrho} V_\varrho(x, y)$ alle Glieder von der Form const. $x^\varkappa y^\mu$, wo

$$\varkappa < kn - \mu$$

ist. Dagegen treten in $U(x, y)^k$ die Glieder x^{kn} und y^{kn} auf. Setzt man daher $x = z^{-1}$ und multipliziert (74) mit z^{kn}, so erhält man, abgesehen von den Gliedern von $z^{kn} U(z^{-1}, y)^k$, nur Glieder $z^\lambda y^\mu$, in denen $\lambda > \mu$ ist. Ferner treten in $z^{kn} U(z^{-1}, y)^k$ nur Glieder $z^\mu y^\mu$ auf, das konstante Glied und der Koeffizient von $z^{kn} y^{kn}$ sind hier von 0 verschieden. Daher erhält man das folgende *Puiseux*sche Diagramm:



Figur 1.

da unterhalb der Geraden unter 45° durch den Nullpunkt keine der zu markierenden Punkte liegen. Alle Reihenentwicklungen der durch

$$z^{kn} \{U(z^{-1}, y)^k + U(z^{-1}, y)^{k-1} V_1(z^{-1}, y) + \cdots + V_k(z^{-1}, y)\} = 0 \tag{76}$$

definierten algebraischen Funktion in der Umgebung der Stelle $z = 0$ sind daher von der Form

$$y_\nu = \alpha_\nu z^{-1} + y_\nu^*. \tag{77}$$

Wegen (75) geht (76) über in

$$\begin{aligned}(78)\quad &(a_0 + a_1 zy + a_2 z^2 y^2 + \cdots + a_n z^n y^n)^k \\ &\quad + (a_0 + a_1 zy + \cdots + a_n z^n y^n)^{k-1} \cdot z^n V_1(z^{-1}, y) \\ &+ (a_0 + a_1 zy + \cdots + a_n z^n y^n)^{k-2} \cdot z^{2n} V_2(z^{-1}, y) + \cdots + z^{kn} V_k(z^{-1}, y) = 0.\end{aligned}$$

Setzt man hierin (77) ein, so folgt aus dem Obigen, daß nur die folgenden konstanten Glieder auftreten

$$(a_0 + a_1 \alpha_\nu + a_2 \alpha_\nu^2 + \cdots + a_n \alpha_\nu^n)^k.$$

Da diese sich wegheben müssen, ist α_ν eine Wurzel von $U(1, y) = 0$.

Daher folgt aus (78)

$$\begin{aligned}(79)\quad &\Big\{ a_1 z y_\nu^* + a_2(2\alpha_\nu z y_\nu^* + z^2 y_\nu^{*2}) + a_3(3\alpha_\nu^2 z y_\nu^* + 3\alpha_\nu z^2 y_\nu^{*2} + z^3 y_\nu^{*3}) \\ &\qquad + \cdots + a_n\Big(\binom{n}{1}\alpha_\nu^{n-1} z y_\nu^* + \binom{n}{2}\alpha_\nu^{n-2} z^2 y_\nu^{*2} + \cdots + \binom{n}{n} z^n y_\nu^{*n}\Big)\Big\}^k \\ &+ \Big\{ a_1 z y_\nu^* + a_2(2\alpha_\nu z y_\nu^* + z^2 y_\nu^{*2}) + \cdots + a_n\Big(\binom{n}{1}\alpha_\nu^{n-1} z y_\nu^* + \cdots + z^n y_\nu^{*n}\Big)\Big\}^{k-1} \\ &\qquad \cdot z^n V_1(z^{-1}, \alpha_\nu z^{-1} + y_\nu^*) + \cdots + z^{kn} V_k(z^{-1}, \alpha_\nu z^{-1} + y_\nu^*) = 0.\end{aligned}$$

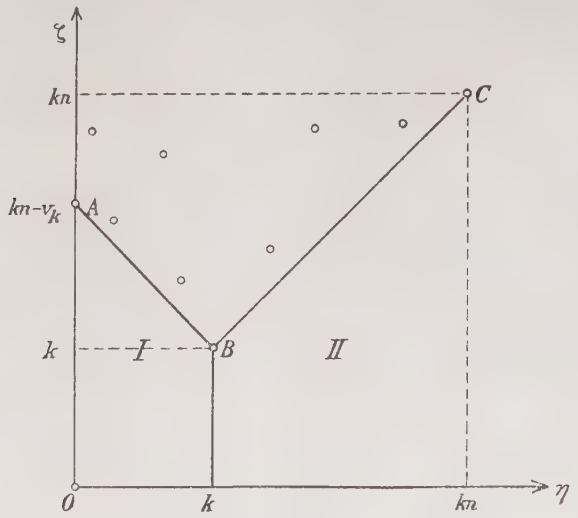
Nur aus der ersten geschweiften Klammer erhält man die Potenz y_ν^{*kn} und zwar mit dem Koeffizienten $a_n^k z^{kn}$. Ferner erhält man aus dieser Klammer $z^k y_\nu^{*k}$ mit dem Koeffizienten

$$(a_1 + 2a_2\alpha_\nu + 3a_3\alpha_\nu^2 + \cdots + n a_n \alpha_\nu^{n-1})^k.$$

Dieser Koeffizient ist von 0 verschieden, da sonst $\frac{dU(1, y)}{dy}$ für $y = \alpha_\nu$ verschwinden, also $U(x, y)$ den Linearfaktor $x\alpha_\nu - y$ mindestens doppelt enthalten müßte. In der ersten geschweiften Klammer treten nur Glieder $z^\mu y_\nu^{*\mu}$ auf. Sonst erhält man nur Glieder $z^\lambda y_\nu^{*\mu}$ mit $\lambda > \mu$, so daß jedenfalls die Punkte mit den Koordinaten (k, k) und (kn, kn) Eckpunkte des *Puiseux*schen Diagramms sind. Da $V_k(x, y)$ vom Gesamtgrade v_k war, ist jedes Glied von $z^{kn} V_k\ (z^{-1}, \alpha_\nu z^{-1} + y_\nu^*)$ durch z^{kn-v_k} teilbar; die von y_ν^* freien Glieder, insbesondere die Glieder der Form const. z^{kn-v_k}, können sich hier nicht fortheben, da die Summe $S_k(x, y)$ der Glieder des Grades v_k von $V_k(x, y)$ zu $U(x, y)$ teilerfremd war und daher die Gleichung

$$S_k(1, y) = 0$$

nicht die Wurzel α_ν haben kann. Demnach ist der Punkt mit den Koordinaten $(0, kn - v_k)$ ein Eckpunkt des *Puiseux*schen Diagramms. Man verbinde nun die drei gefundenen Punkte mit den Koordinaten $(0, kn - v_k) = A$, $(k, k) = B$ und $(kn, kn) = C$ durch einen Streckenzug; dann wird behauptet, daß dieser Streckenzug das *Puiseux*sche Diagramm für y_ν^* liefert.



Figur 2.

Aus dem Obigen folgt, daß jedenfalls die Gerade BC (s. Fig. 2) einen Teil des *Puiseux*schen Diagramms bildet. Daher braucht nur noch gezeigt zu werden, daß unterhalb der Geraden AB in dem Trapez I keine der zu markierenden Punkte liegen.

Nun folgt aus (79), daß die aus $z^{kn} U(z^{-1}, \alpha_\nu z^{-1} + y_\nu^*)^k$ hervorgehenden Glieder mindestens durch y_ν^{*k} teilbar sind; die aus $z^{kn} V_k(z^{-1}, \alpha_\nu z^{-1} + y_\nu^*)$ hervorgehenden Glieder waren mindestens durch z^{kn-v_k} teilbar. Alle diese Glieder liefern daher keine Punkte im Innern von I. Alle aus

$$z^{kn} U(z^{-1}, \alpha_\nu z^{-1} + y_\nu^*)^{k-\varrho} V_\varrho\ (z^{-1}, \alpha_\nu z^{-1} + y_\nu^*)$$

hervorgehenden Glieder sind wegen (79) mindestens durch $y_\nu^{*k-\varrho}\, z^{k-\varrho+\varrho n-v_\varrho}$ teilbar. Tritt unter diesen Gliedern das Glied const. $y_\nu^{*k-\varrho+\sigma}\, z^{k-\varrho+\varrho n-v_\varrho+\tau}$ auf ($\sigma \geqq 0,\ \tau \geqq 0$), so käme der Punkt mit den Koordinaten $(k-\varrho+\sigma,\ k-\varrho+\varrho n-v_\varrho+\tau)$ als Eckpunkt des Diagramms in Frage. Nun ist die Gleichung der Geraden AB:

$$(\zeta - k)(-k) = (\eta - k)(kn - v_k - k)$$

oder

$$\zeta = \frac{-\eta\,(kn - v_k - k) + k^2 n - k\,v_k}{k} = \eta + (k-\eta)\,n - \frac{v_k\,(k-\eta)}{k}.$$

Daher hat der Schnittpunkt von AB mit der Geraden

$$\eta = k - \varrho$$

die Koordinaten $(k-\varrho,\ k-\varrho+\varrho n - \frac{v_k \varrho}{k})$. Andererseits ist nach (72)

$$k - \varrho + \varrho n - \frac{v_k\,\varrho}{k} \leqq k - \varrho + \varrho n - v_\varrho.$$

Folglich liegt der Punkt mit den Koordinaten $(k-\varrho,\ k-\varrho+\varrho n - v_\varrho)$ nicht unterhalb der Geraden AB, also erst recht der Punkt mit den Koordinaten $(k-\varrho+\sigma,\ k-\varrho+\varrho n - v_\varrho+\tau)$ nicht unterhalb von AB, da nach (72)

$$kn - v_k \geqq k$$

war. Innerhalb des Trapezes I liegen daher keine der zu markierenden Punkte. Folglich bildet auch die Gerade AB einen Teil des *Puiseux*schen Diagramms für y_ν^*. Man erhält also

$$y_\nu^* = \beta_\nu\, z^{\frac{kn-v_k-k}{k}} + \cdots,$$

folglich wegen (77) und (73)

$$y_\nu = \alpha_\nu\, x + \beta_\nu\, x^{\frac{v_k-(n-1)k}{k}} + \cdots = \alpha_\nu\, x + \beta_\nu\, x^{-t} + \cdots.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Auf Grund dieses Hilfssatzes sollen nun zwei Sätze (8 a und 8 b) gleichzeitig bewiesen werden, die den wesentlichsten Teil der *Siegel*schen Sätze B und C als Spezialfall enthalten und außerdem Resultate liefern, die sich mit der *Siegel*schen Methode nicht ergeben.

XX. **Satz 8:** *Es sei $U(x, y)$ eine binäre Form der Dimension n ohne mehrfache Linearfaktoren mit Koeffizienten aus dem algebraischen Zahlkörper* K, *der in bezug auf* P *vom Grade h sei; $V_1(x, y), V_2(x, y), \ldots, V_k(x, y)$ seien ganze rationale Funktionen in x und y mit Koeffizienten aus* K, *ihre Gesamtgrade seien $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Es sei*

$$v_\varrho \leqq \frac{v_k\,\varrho}{k} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, k-1). \tag{80}$$

Ferner sei die Summe der Glieder der Dimension v_k von $V_k(x, y)$ zu $U(x, y)$ teilerfremd. Man setze

$$\begin{cases} \text{a)} & s = \left[\frac{1}{2}\,(\sqrt{4n+1} - 1)\right], \\ \text{b)} & s' = \left[\frac{1}{2}\,(\sqrt{4nh+1} - 1)\right]. \end{cases} \tag{81}$$

Ist dann, wenn h_0 eine positive ganze rationale Zahl bedeutet,

$$(82)\qquad \begin{cases} \text{a)} & v_k < k\left\{n - h\left(\frac{n}{s+1} + s\right)\right\}, \\ \text{b)} & v_k < k\left\{n - h_0^4\left(\frac{nh}{s'+1} + s'\right)\right\}, \end{cases}$$

so hat die diophantische Gleichung

$$(83)\quad U(x,y)^k + U(x,y)^{k-1} V_1(x,y) + \cdots + U(x,y) V_{k-1}(x,y) + V_k(x,y) = 0$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x, y

a) *aus* K,

b) *von den Graden $h_1 \leqq h_0$ bzw. $h_2 \leqq h_0$.*

Beweis: Durch eine unimodulare Substitution kann man erreichen, daß in (83) die Koeffizienten von x^{kn} und y^{kn} von 0 verschieden sind. Jeder ganzzahligen Lösung der so entstehenden Gleichung entspricht eine ganzzahlige Lösung von (83) und umgekehrt. Daher kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß in (83) die Koeffizienten von x^{kn} und y^{kn} von 0 verschieden sind. Aus (81) und (82) folgt

$$v_k < k\,(n-1).$$

Folglich sind wegen (80) die Voraussetzungen des Hilfssatzes 3 sämtlich erfüllt. Daher sind alle Reihenentwicklungen der durch (83) definierten algebraischen Funktion von x in der Umgebung der Stelle $x = \infty$ von der Form

$$(84)\qquad y_\nu = \alpha_\nu x + \beta_\nu x^{\frac{-(n-1)k+v_k}{k}} + \cdots,$$

wo α_ν eine Wurzel von $U(1, y) = 0$, also eine algebraische Zahl höchstens vom Grade n in bezug auf den Zahlkörper K ist. Analog sind alle Reihenentwicklungen der durch (83) definierten algebraischen Funktion von y in der Umgebung der Stelle $y = \infty$ von der Form

$$(85)\qquad x_\nu = \alpha'_\nu y + \beta'_\nu y^{\frac{-(n-1)k+v_k}{k}} + \cdots,$$

wo α'_ν eine Wurzel von $U(x, 1) = 0$, also eine algebraische Zahl höchstens vom Grade n in bezug auf K ist.

Es soll nun im Fall a) Satz 6, im Fall b) Satz 7 angewandt werden. In den Bezeichnungen dieser Sätze ist hier für die Reihen (84) und (85)

$$(86)\qquad \left.\begin{cases} N = kn, \\ p_\nu = q_\nu = 1, \\ d_\nu = k \end{cases}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, kn).$$

Ferner ist für die Reihen (84)

$$\left.\begin{aligned} a_{0\nu} &= \alpha_\nu, \\ a_{\tau_\nu \nu} &= \beta_\nu \end{aligned}\right\} \ (\nu = 1, 2, \ldots, kn)$$

und für die Reihen (85)

$$\left.\begin{aligned} a_{0\nu} &= \alpha'_\nu \\ a_{\tau_\nu \nu} &= \beta'_\nu \end{aligned}\right\} \ (\nu = 1, 2, \ldots, kn).$$

Nun waren α_ν und α'_ν höchstens vom Grade n in bezug auf K, also höchstens vom Grade nh in bezug auf P. Daher kann man setzen [1])

$$(87)\qquad \left.\begin{cases} n_\nu = n & \text{im Fall a),} \\ n_\nu = nh & \text{im Fall b)} \end{cases}\right\} \ (\nu = 1, 2, \ldots, kn).$$

---

[1]) Ersichtlich gelten die Sätze 6 und 7 erst recht, wenn n_ν nicht der genaue Grad von $a_{0\nu}^{q_\nu}$, sondern eine größere Zahl ist.

Ferner ist wegen (87) und (81)

$$(88)\qquad \left.\begin{cases} s_\nu = s, \\ z_\nu = \dfrac{n}{s+1} + s \end{cases}\right\} \text{im Fall a),} \qquad \left.\begin{cases} s_\nu = s', \\ z_\nu = h_0^2\left(\dfrac{nh}{s'+1} + s'\right) \end{cases}\right\} \text{im Fall b)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, kn).$$

Aus (84) und (85) folgt

$$\frac{d_\nu p_\nu - r_\nu}{d_\nu q_\nu} = \frac{-(n-1)k + v_k}{k} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, kn),$$

also wegen (86)

$$r_\nu = nk - v_k .$$

Folglich ist wegen (82), (86) und (88)

$$r_\nu > kh\left(\frac{n}{s+1} + s\right) = d_\nu h p_\nu q_\nu z_\nu \qquad \text{im Fall a),}$$

$$r_\nu > kh_0^4\left(\frac{nh}{s'+1} + s'\right) = d_\nu h_0^2 p_\nu q_\nu z_\nu \qquad \text{im Fall b).}$$

Daher folgt für $C = 1$ und $\gamma = 0$ wegen (84) aus Satz 6 bzw. aus Satz 7, daß die Gleichung (83) nur endlich viele ganzzahlige Lösungen x, y aus K bzw. von den Graden $h_1 \leqq h_0$ und $h_2 \leqq h_0$ hat, für die

$$(89)\qquad \begin{cases} \operatorname{Max}\{|y|, |y'|, \ldots, |y^{(h-1)}|\} \leqq \operatorname{Max}\{|x|, |x'|, \ldots, |x^{(h-1)}|\} & \text{im Fall a),} \\ \operatorname{Max}\{|y|, |y'|, \ldots, |y^{(h_2-1)}|\} \leqq \operatorname{Max}\{|x|, |x'|, \ldots, |x^{(h_1-1)}|\} & \text{im Fall b)} \end{cases}$$

ist. Analog folgt aus (85), daß es nur endlich viele Lösungen gibt, für die

$$(90)\qquad \begin{cases} \operatorname{Max}\{|y|, |y'|, \ldots, |y^{(h-1)}|\} \geqq \operatorname{Max}\{|x|, |x'|, \ldots, |x^{(h-1)}|\} & \text{im Fall a)} \\ \operatorname{Max}\{|y|, |y'|, \ldots, |y^{(h_2-1)}|\} \geqq \operatorname{Max}\{|x|, |x'|, \ldots, |x^{(h_1-1)}|\} & \text{im Fall b)} \end{cases}$$

ist. Aus (89) und (90) ergibt sich die Behauptung.

XXI. Der Satz 8 liefert für $k = 1$ im wesentlichen die *Siegel*schen Sätze B und C. Während aber in diesen Sätzen nur vorausgesetzt wird, daß $V_k(x, y)$ zu $U(x, y)$ teilerfremd ist, wurde im Satz 8 die weitergehende Voraussetzung gemacht, daß die Summe der Glieder der höchsten Dimension in $V_k(x, y)$ zu $U(x, y)$ teilerfremd ist. Um zu zeigen, daß die Sätze B und C als Spezialfälle der Sätze 6 und 7 erhalten werden können, kann man einen ähnlichen Satz wie Satz 8 aufstellen, dessen Beweis analog verläuft; man muß nur beim Hilfssatz und bei dem eigentlichen Satz die Voraussetzung hinzunehmen, daß $V_1(x, y)$, $V_2(x, y), \ldots, V_{k-1}(x, y)$ nicht Polynome, sondern Konstanten sind.

Während der Satz 8 eine direkte Anwendung der Kriterien des § 2 darstellt, muß man häufig die gegebenen diophantischen Gleichungen erst auf andere Gleichungen zurückführen, um die Kriterien anwenden zu können. Für eine ziemlich umfangreiche Klasse diophantischer Gleichungen führe ich dies in der am Schluß der Einleitung genannten Arbeit durch.

Lebenslauf

Ich, Alfred Brauer, wurde am 9. 4. 1894 als Sohn des Kaufmanns und Handelsrichters Max Brauer in Charlottenburg geboren. Von Oktober 1900 an besuchte ich die Kaiser-Friedrich-Schule zu Charlottenburg, an der ich Ostern 1912 die Reifeprüfung bestand. Nach einjähriger praktischer Tätigkeit studierte ich im S. S. 1913 in Heidelberg, in den nächsten beiden Semestern in Berlin Mathematik, Physik und Philosophie. Bei Kriegsausbruch trat ich als Kriegsfreiwilliger ein und rückte mit der Maschinengewehrkompagnie des Res.-Inf.-Rgt. 269 ins Feld. Später kämpfte ich als Zugführer in den Maschinengewehrkompagnien des Res.-Jäger-Bat. 16, der M. G. Scharfschützenabteilung 35 und des Ldw.-Inf.-Rgt. 32 auf dem westlichen, östlichen und Balkankriegsschauplatz. Beim Sturm auf Stojnik (Serbien) wurde ich verwundet. Nach meiner Rückkehr aus dem Felde im Januar 1919 nahm ich mein Studium in Berlin wieder auf, in den ersten Jahren durch gesundheitliche Schädigungen infolge des Feldzuges sehr stark gehindert. Besonders beschäftigte ich mich mit Mathematik; ich veröffentlichte die folgenden kleinen Arbeiten:

Lösung der Aufgabe 21, Jahresber. d. D. M. V. 34 (1925) Abt. 2 S. 98—100.

Über einige spezielle diophantische Gleichungen, Math. Zeitschr. 25 (1926) S. 499—504.

Über die Irreduzibilität einiger spezieller Klassen von Polynomen (gemeinsam mit R. Brauer und H. Hopf), Jahresber. d. D. M. V. 35 (1926) Abt. 1 S. 99—113.

Lösung der Aufgaben 30—32, ebenda Abt. 2 S. 92—96.

Lösung der Aufgabe 46 (gemeinsam mit R. Brauer), ebenda 36 (1927) Abt. 2 S. 90—92.

Über Sequenzen von Potenzresten, Sitzungsber. d. Preußischen Akademie der Wissenschaften Phys.-math. Klasse 1928 S. 9—16.

Während meines Studiums hörte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren:

Baumgardt, Bieberbach, Blasius, M. Cantor †, Carathéodory, Diels, Einstein, Erdmann †, Feigl, Frobenius †, Hamburger, Hammerstein, Hertz, Hopf, Jastrow, Jolles, Knopp, C. Koehler, W. Köhler, Königsberger †, Lampe †, v. Laue, Lehman-Filhés †, Lenard, Löwner, Mertens †, v. Mises, Planck, Rademacher, Regener, Rieffert, Riehl †, Salomon, E. Schmidt, v. Schmoller †, Schottky, I. Schur, Schwarz †, Spranger, Stäckel †, Szegö, Wehnelt, Wertheimer.

Allen diesen meinen hochverehrten Lehrern, insbesondere den Herren Prof. Dr. Bieberbach, Prof. Dr. v. Mises, Prof. Dr. E. Schmidt und Prof. Dr. I. Schur, möchte ich auch an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.